

DM 11 – Corrigé

1. Soit k dans \mathbb{N}^* .

Effectuons une comparaison somme/intégrale.

• Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $x \in \llbracket i, i+1 \rrbracket$, $i^k \leq x^k$.

D'où, par positivité de l'intégrale ($i \leq i+1$), on a

$$\int_i^{i+1} i^k dx \leq \int_i^{i+1} x^k dx \quad \text{i.e.} \quad i^k \leq \int_i^{i+1} x^k dx.$$

En sommant ces inégalités pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$S_n(k) = \sum_{i=1}^n i^k \leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} x^k dx = \int_1^{n+1} x^k dx = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

• Pour tout $i \geq 2$ pour tout $x \in \llbracket i-1, i \rrbracket$, $x^k \leq i^k$.

D'où, par positivité de l'intégrale ($i-1 \leq i$), on a

$$\int_{i-1}^i x^k dx \leq \int_{i-1}^i i^k dx \quad \text{i.e.} \quad \int_{i-1}^i x^k dx \leq i^k.$$

En sommant ces inégalités pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{i=2}^n i^k \geq \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i x^k dx = \int_1^n x^k dx = \frac{n^{k+1} - 1}{k+1}.$$

En ajoutant 1 de part et d'autre, on obtient :

$$S_n(k) \geq 1 + \frac{n^{k+1} - 1}{k+1}.$$

• On a donc

$$1 + \frac{n^{k+1} - 1}{k+1} \leq S_n(k) \leq \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

En divisant par $n^{k+1} > 0$, on a

$$\frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{n^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{n^{k+1}} S_n(k) \leq \frac{1}{k+1} \left(\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = 0$ et $\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} \sim \frac{n^{k+1}}{n^{k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{n^{k+1}}\right) = \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^{k+1}}\right)$,

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} S_n(k) = \frac{1}{k+1}$.

2. Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance. De plus,

$$\sum_{i=1}^N P(X \geq i) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=i}^N P(X = k) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^k P(X = k) = \sum_{k=1}^N k P(X = k) = E(X).$$

3. Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$, X_1 admet une espérance et une variance (donc un moment d'ordre 2) et

$$E(X_1) = \frac{N+1}{2}$$

$$V(X_1) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

$$E(X_1)^2 = V(X_1) + (E(X_1))^2 \quad (\text{d'après K-H})$$

$$= \frac{N^2 - 1}{12} + \frac{N^2 + 2N + 1}{4} = \frac{4N^2 + 6N + 2}{12} = \frac{2N^2 + 3N + 1}{6}.$$

4. (a) `def simulX():`
`return [random.randint(1,10) for i in range(100)]`

(b) `def REALIV():`
`L = simulX()`
`return [max(L[:i]) for i in range(100)]`

5. Soit k dans \mathbb{N}^* supérieur à 2.

(a) Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$\begin{aligned} P(U_k \geq i) &= P(\min(X_1, \dots, X_k) \geq i) = P((X_1 \geq i) \cap \dots \cap (X_k \geq i)) \\ &= P(X_1 \geq i) \times \dots \times P(X_k \geq i) \quad (\text{indépendants}) \\ &= P(X_1 \geq i)^k \quad (\text{même loi}) \\ &= \left(\sum_{j=i}^N P(X_1 = j) \right)^k = \left(\sum_{j=i}^N \frac{1}{N} \right)^k = \left(\frac{N-i+1}{N} \right)^k. \end{aligned}$$

(b) • On a, pour tout $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $V_{k+1} \geq V_k$, donc, dès que $V_{k_0} = 10$, on a $V_k = 10$ pour tout $k \in \llbracket k_0, 100 \rrbracket$.

• De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(V_k = 10) &= 1 - P(V_k \leq 9) \\ &= 1 - P(X_1 \leq 9 \cap \dots \cap X_k \leq 9) \\ &= 1 - P(X_1 \leq 9) \times \dots \times P(X_k \leq 9) \quad (\text{indépendants}) \\ &= 1 - \left(\frac{9}{10} \right)^k \end{aligned}$$

et cette quantité tend très vite vers 1, donc la suite (V_k) prend en général très vite la valeur 10.

(c) D'après la question 2,

$$\begin{aligned} E(U_k) &= \sum_{i=1}^N P(U_k \geq i) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{N-i+1}{N} \right)^k = \frac{1}{N^k} \sum_{i=1}^N (N-i+1)^k \\ &= \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^N j^k \quad (\text{en posant } j = N-i+1) \\ &= \frac{1}{N^k} S_k(N) \end{aligned}$$

Comme, d'après la question 1, $\frac{1}{N^{k+1}} S_k(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} \neq 0$, on a

$$S_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^{k+1}}{k+1}, \quad \text{et donc} \quad E(U_k) = \frac{1}{N^k} S_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N}{k+1}.$$

6. (a) • Les variables X_i sont indépendantes.

En posant $f : x \mapsto N+1-x$, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $Y_i = f(X_i)$, donc les variables (Y_1, \dots, Y_N) sont indépendantes.

• Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $X_i(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$, donc $Y_i(\Omega) = (N+1-X_i)(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$.
De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$P(Y_i = k) = P(N+1-X_i = k) = P(X_i = \underbrace{N+1-k}_{\in \llbracket 1, N \rrbracket}}) = \frac{1}{N},$$

donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.

(b) On a

$$\begin{aligned} U_k &= \min(X_1, \dots, X_k) = -\max(-X_1, \dots, -X_k) \\ &= N+1 - \max(N+1-X_1, \dots, N+1-X_k) \\ &= N+1 - \max(Y_1, \dots, Y_k) = N+1 - V_k(Y), \end{aligned}$$

donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(U_k) = N + 1 - E(V_k(Y)), \quad \text{donc} \quad E(V_k(Y)) = N + 1 - E(U_k).$$

De plus, par propriété de la variance, comme $U_k = N + 1 - V_k(Y)$, on a

$$V(U_k) = (-1)^2 V(V_k(Y)), \quad \text{donc} \quad V(V_k(Y)) = V(U_k).$$

Enfin, comme les X_i et les Y_i suivent les mêmes conditions (d'indépendance et de loi), V_k et $V_k(Y)$ ont la même loi, donc la même espérance et la même variance, donc :

$$E(V_k) = N + 1 - E(U_k) \quad \text{et} \quad V(V_k) = V(U_k).$$

7. (a) $U_2 + V_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ et $U_2 V_2 = \min(X_1, X_2) \times \max(X_1, X_2) = X_1 X_2$.

(b) Par suite,

$$V(U_2 + V_2) = V(X_1 + X_2) \stackrel{\text{ind}}{=} V(X_1) + V(X_2) = \frac{N^2 - 1}{6}$$

et

$$E(U_2 V_2) = E(X_1 X_2) \stackrel{\text{ind}}{=} E(X_1) E(X_2) = \frac{(N + 1)^2}{4}.$$

(c) On a $V(U_2) = V(V_2)$ d'après la question 6b.

De plus,

$$V(U_2 + V_2) = V(U_2) + V(V_2) + 2\text{Cov}(U_2, V_2),$$

donc

$$\begin{aligned} 2V(U_2) &= V(U_2 + V_2) - 2\text{Cov}(U_2, V_2) = \frac{N^2 - 1}{6} - 2 \frac{(N^2 - 1)^2}{36N^2} \\ &= \frac{3N^4 - 3N^2 - N^4 + 2N^2 - 1}{18N^2} = \frac{2N^4 - N^2 - 1}{18N^2}, \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad V(U_2) = V(V_2) = \frac{2N^4 - N^2 - 1}{36N^2}.$$

(d) $\rho_2(N) = \frac{\text{Cov}(U_2, V_2)}{\sigma(U_2)\sigma(V_2)} = \frac{(N^2 - 1)^2}{2N^4 - N^2 - 1}.$

(e) $\rho_2(N) = \frac{(N^2 - 1)^2}{2N^4 - N^2 - 1} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^4}{2N^4} \underset{N \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2}.$

8. (a) *Qui est ce N ici ?? On va supposer que X est à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket \dots$*

Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet un moment d'ordre 2 et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (2i - 1) P(X \geq i) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=i}^N (2i - 1) P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^k (2i - 1) P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(P(X = k) \sum_{i=1}^k (2i - 1) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N P(X = k) k \frac{1 + (2k - 1)}{2} \quad (\text{somme de termes d'une suite arithmétique de raison } 2) \\ &= \sum_{k=1}^N k^2 P(X = k) = E(X^2). \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} E(U_k^2) &= \sum_{i=1}^N (2i - 1) P(U_k \geq i) = \sum_{i=1}^N (2i - 1) \left(\frac{N - i + 1}{N} \right)^k \\ &= \frac{1}{N^k} \sum_{i=1}^N (2i - 1) (N + 1 - i)^k = \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^N (2(N + 1 - j) - 1) j^k \quad (\text{en posant } j = N + 1 - i) \\ &= \frac{1}{N^k} \left((2N + 1) \sum_{j=1}^N j^k - 2 \sum_{j=1}^N j^{k+1} \right) = \frac{1}{N^k} ((2N + 1) S_k(N) - 2 S_{k+1}(N)). \end{aligned}$$

(c) D'après la formule de K-H,

$$\begin{aligned} V(U_k) &= E(U_k)^2 - (E(U_k))^2 \\ &= \frac{1}{N^k} ((2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)) - \left(\frac{1}{N^k} S_k(N) \right)^2 \end{aligned}$$

(d) D'après la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k(N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^{k+1}}{k+1}$, donc $S_k(N) = \frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})$.

Par suite,

$$\begin{aligned} V(U_k) &= \frac{1}{N^k} ((2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)) - \left(\frac{1}{N^k} S_k(N) \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^k} \left((2N+1) \left(\frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1}) \right) - 2 \frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2}) \right) - \left(\frac{N}{k+1} + o(N) \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^k} \left(2 \frac{N^{k+2}}{k+1} + \frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1}) - 2 \frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2}) \right) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\ &= \frac{1}{N^k} \left(2N^{k+2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + o(N^{k+2}) \right) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\ &= 2N^2 \frac{1}{(k+1)(k+2)} + o(N^2) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\ &= N^2 \frac{k}{(k+1)^2(k+2)} + o(N^2) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{(k+1)^2(k+2)} N^2. \end{aligned}$$