

SUJET CCMP 2023 MATH 2 PC CORRIGÉ

Préliminaires

1. Par équivalences,

$$AU = U \iff \begin{pmatrix} A[1,1] & \cdots & A[1,N] \\ \vdots & & \vdots \\ A[N,1] & \cdots & A[N,N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \sum_{j=1}^N A[i, j] = 1 \iff (M_2).$$

Si A et B sont des noyaux de Markov (ou “matrices stochastiques”), posons $C = AB$. La relation

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \quad C[i, j] = \sum_{k=1}^N A[i, k] B[k, j]$$

montre que tous les coefficients de C sont positifs, donc C vérifie (M_1) . Enfin,

$$CU = ABU = A(BU) = AU = U$$

donc C vérifie (M_2) , et C est bien un noyau de Markov.

2. C'est une récurrence immédiate. La matrice-identité $K^0 = I_N$ est bien un noyau de Markov, et l'hérédité résulte de **Q1**.

3. Comme K^n est un noyau de Markov pour tout n , on a $0 \leq K^n[i, j] \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. On déduit la majoration $\left| \frac{t^n K^n[i, j]}{n!} \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$, la suite $\left(\frac{|t|^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant sommable puisqu'on reconnaît le terme général d'une série exponentielle.

Il en résulte la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour tout couple (i, j) , on a $H_t[i, j] \geq 0$ puisque c'est une somme de réels positifs. Et, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, comme les matrices K^n sont des noyaux de Markov,

$$\sum_{j=1}^N H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^N K^n[i, j] \right) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1,$$

donc H_t est un noyau de Markov pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

5. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{R}_+$. Posons $M = H_t H_s$. Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, on a

$$\begin{aligned} M[i, j] &= \sum_{k=1}^N H_t[i, k] H_s[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^N \left(e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K^p[i, k]}{p!} \right) \left(e^{-s} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{s^q K^q[k, j]}{q!} \right) \\ &= e^{-(t+s)} \sum_{k=1}^N \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{t^p s^q K^p[i, k] K^q[k, j]}{p! q!} \right) \right] & (*) \\ &= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{p+q=n} \left(\sum_{k=1}^N \frac{t^p s^q K^p[i, k] K^q[k, j]}{p! q!} \right) \right] & (**) \\ &= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} t^p s^q K^n[i, j] \right) & (***) \\ &= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n K^n[i, j]}{n!} = H_{t+s}[i, j]. & (****) \end{aligned}$$

On a donc prouvé l'égalité $H_t H_s = H_{t+s}$. On notera que $H_0 = I_N$.

Commentaires:

(*): on développe le produit de Cauchy de deux séries à termes positifs convergentes.

(**): les interversions de sommations sont permises car toutes les sommes, sauf une, sont finies, c'est la linéarité de la somme d'une série.

(***): on reconnaît le calcul des coefficients du produit matriciel $K^n = K^{p+q} = K^p K^q$.

(****): on reconnaît le développement de $(t+s)^n$ par la formule du binôme.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

6. On a bien $K[i, j] = p_{ij} \geq 0$ puisque c'est une probabilité conditionnelle.

Cela a-t-il un sens toutefois si $P(Z_k = i) = 0$ pour tout k ?

De plus, si $k \in \mathbb{N}$, la famille $(\{Z_{k+1} = j\})_{1 \leq j \leq N}$ est un système complet d'événements. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, en admettant qu'il existe au moins un entier naturel k tel que $P(Z_k = i) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{\{Z_k=i\}}$ étant une probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) , on a alors

$$\sum_{j=1}^N K[i, j] = \sum_{j=1}^N P_{\{Z_k=i\}}(Z_{k+1} = j) = P_{\{Z_k=i\}}(\Omega) = 1.$$

La matrice K est donc un noyau de Markov.

7. Pour $n = 0$, on a $Z_0 = 1$ (variable aléatoire "constante" ou "certaine"), donc

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad P(Z_0 = j) = \delta_{1,j} = I_N[1, j] = K^0[1, j].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie au rang n . Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = j) &= \sum_{i=1}^N P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i) P(Z_n = i) \\ &= \sum_{i=1}^N P(Z_n = i) p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N K^n[1, i] K[i, j] = K^{n+1}[1, j], \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Dans ce contexte, le programme autorise explicitement à considérer que le terme $P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i) P(Z_n = i)$ peut être remplacé par la valeur 0 si $P(Z_n = i) = 0$.

8. Comme $(\{Y_t = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités

totales donne, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(A_{t,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \cap \{Y_t = n\})$. Or,

$$A_{t,j} \cap \{Y_t = n\} = \{Z_n = j\} \cap \{Y_t = n\}.$$

Si l'on suppose les variables Y_t et Z_n indépendantes, ce que l'énoncé omet de mentionner, alors

$$P(A_{t,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j) P(Y_t = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!} K^n[1, j] = H_t[1, j].$$

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

9. L'endomorphisme u est diagonalisable, plus précisément il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u . De plus, l'hypothèse faite sur q_u signifie que u est un endomorphisme autoadjoint positif, on sait alors que ses valeurs propres sont positives, i.e. $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

10. Notons $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de u , comptées avec leur multiplicité. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ une base orthonormale de E telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $x \in E$, décomposons-le dans cette base: $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$. Comme

$\ker(u) = E_0(u) = \text{Vect}(e_1)$ et $(\ker(u))^\perp = \text{Vect}(e_2, \dots, e_N)$, on a $p(x) = x_1 e_1$ et $x - p(x) = \sum_{i=2}^N x_i e_i$, puis par Pythagore, $\|x - p(x)\|^2 = \sum_{i=2}^N x_i^2$ et

$$\begin{aligned} q_u(x - p(x)) &= \left(u(x - p(x)) \mid x - p(x) \right) = \left(\sum_{i=2}^N \lambda_i x_i e_i \mid \sum_{j=2}^N x_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=2}^N \lambda_i x_i^2 \quad (\text{vecteurs deux à deux orthogonaux}) \\ &\geq \sum_{i=2}^N \lambda_2 x_i^2 = \lambda_2 \|x - p(x)\|^2. \end{aligned}$$

Partie 3 - Convergence de $H_i[i, j]$

11. Posons $L = \pi K$, alors $L \in \mathcal{M}_{1, N}(\mathbb{R})$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a

$$L[j] = \sum_{i=1}^N \pi[i] K[i, j] = \sum_{i=1}^N K[j, i] \pi[j] = \pi[j] \sum_{i=1}^N K[j, i] = \pi[j]$$

car la matrice K vérifie (M_2) .

Remarque: Soit la matrice diagonale $D = \text{diag}(\pi[1], \dots, \pi[N]) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Alors on peut noter que $\pi = U^\top D$ et que le caractère π -réversible de K se traduit par la relation $DK = K^\top D$. On a donc $\pi K = U^\top DK = U^\top K^\top D = (KU)^\top D = U^\top D = \pi$ en utilisant **Q1**.

12. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates. Comme $\pi[i] > 0$ pour tout i , on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{N, 1}(\mathbb{R}) \quad \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^N \pi[i] X[i]^2 \geq 0$$

puisque tous les termes sont positifs. Si $\langle X, X \rangle = 0$, alors chaque terme est nul, donc $X[i] = 0$ pour tout i puisque $\pi[i]$ est non nul, donc $X = 0$. On a donc le caractère défini positif.

Remarque. On peut noter que $\langle X, Y \rangle = X^\top DY$, la matrice diagonale D ayant été introduite ci-dessus. Comme il est immédiat que $D \in \mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$, cela donne le caractère défini positif de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

13. Comme u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^N \simeq \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $I_N - K$, on a $\ker(u) = \ker(I_N - K) = E_1(K)$. Or, il a été supposé que le réel 1 est valeur propre simple de K , ce qui entraîne que le sous-espace propre associé $E_1(K)$ est de dimension 1. Comme U est un vecteur non nul appartenant à cette droite vectorielle d'après **Q1.**, on déduit que $\ker(u) = \text{Vect}(U)$.

Montrons que l'endomorphisme $v = \text{id}_E - u : X \mapsto KX$ est autoadjoint dans l'espace euclidien E , ce qui entraînera la même propriété pour $u = \text{id}_E - v$. C'est immédiat si l'on utilise les remarques formulées ci-dessus (correction des questions **11.** et **12.**) puisque, si $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}))^2$, on a

$$\langle v(X), Y \rangle = \langle KX, Y \rangle = (KX)^\top DY = X^\top K^\top DY = X^\top DKY = \langle X, KY \rangle = \langle X, v(Y) \rangle .$$

Sinon, on peut faire des calculs...

14. Pour tout $X \in E$, on a

$$\begin{aligned} q_u(X) &= \langle u(X), X \rangle = \sum_{i=1}^N (X - KX)[i] X[i] \pi[i] \\ &= \sum_{i=1}^N \left(X[i] - \sum_{j=1}^N K[i, j] X[j] \right) X[i] \pi[i] \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N K[i, j] (X[i] - X[j]) \right) X[i] \pi[i] \quad (*) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K[i, j] (X[i] - X[j]) X[i] \pi[i] = A . \end{aligned}$$

(*): car K vérifie la propriété (M_2) .

Notons A cette première expression obtenue pour $q_u(X)$. En intervertissant les deux sommes et en échangeant les noms des indices de sommation, et enfin en utilisant le fait que K est π -réversible, on a aussi

$$\begin{aligned} q_u(X) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K[j, i] (X[j] - X[i]) X[j] \pi[j] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K[i, j] (X[j] - X[i]) X[j] \pi[i] = B . \end{aligned}$$

On a donc aussi $q_u(X) = \frac{A+B}{2}$, soit

$$\begin{aligned} q_u(X) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} K[i, j] \pi[i] \left((X[i] - X[j]) X[i] + (X[j] - X[i]) X[j] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i] . \end{aligned}$$

On observe que $q_u(X) \geq 0$ pour tout X de E , on en déduit par la question **9**. (ou par le cours) que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

Remarque. Les valeurs propres de l'endomorphisme u sont celles de la matrice $I_N - K$. Or, l'endomorphisme u de E est diagonalisable car il est autoadjoint, la matrice canoniquement associée $I_N - K$ est donc aussi diagonalisable (sur \mathbb{R}), il en est donc de même de la matrice K . Enfin, K étant une matrice stochastique (un "noyau de Markov"), c'est une question classique de montrer que ses valeurs propres (complexes) sont de module inférieur ou égal à 1. Le spectre de K est donc inclus dans $[-1, 1]$, et celui de $I_N - K$ (et donc de u) est alors inclus dans $[0, 2]$.

- 15.** Commençons par dériver $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $t \mapsto H_t$. La dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ s'étudiant coefficient par coefficient, posons $h_{i,j}(t) = H_t[i, j]$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. On peut écrire $h_{i,j}(t) = e^{-t} s_{i,j}(t)$, où $s_{i,j}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^n[i, j]}{n!} t^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini d'après **Q3**. La fonction $h_{i,j}$ est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec $h'_{i,j}(t) = e^{-t} (s'_{i,j}(t) - s_{i,j}(t))$. Une dérivation terme à terme (*justifiée pour une série entière dans son intervalle de convergence*) donne par ailleurs

$$\begin{aligned} s'_{i,j}(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{K^n[i, j]}{n!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^{n+1}[i, j]}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^N K[i, k] K^n[k, j] \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=1}^N K[i, k] \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^n[k, j]}{n!} t^n \right) \\ &= e^t \sum_{k=1}^N K[i, k] H_t[k, j] = e^t (KH_t)[i, j]. \end{aligned}$$

Finalement, $h'_{i,j}(t) = (KH_t)[i, j] - H_t[i, j]$ pour tout (i, j) , donc $h'(t) = KH_t - H_t$.

Enfin, l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) \\ (M, X) & \mapsto MX \end{cases}$ étant bilinéaire, il résulte du cours sur les fonctions vectorielles que $\psi_X : t \mapsto h(t) \cdot X$ est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'_X(t) = h'(t) \cdot X = (KH_t - H_t) X = -(I_N - K)H_t X.$$

- 16.** On a $\varphi_X(t) = \|\psi_X(t)\|^2 = \langle \psi_X(t), \psi_X(t) \rangle$. Le produit scalaire étant bilinéaire, on déduit que φ_X est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\begin{aligned} \varphi'_X(t) &= 2 \langle \psi'_X(t), \psi_X(t) \rangle = -2 \langle (I_N - K)H_t X, H_t X \rangle \\ &= -2 \langle u(H_t X), H_t X \rangle = -2 q_u(H_t X). \end{aligned}$$

- 17.** Le vecteur U est unitaire dans l'espace euclidien E puisque $\|U\|^2 = \sum_{i=1}^N 1 \times 1 \times \pi[i] = 1$. On

a donc $p(X) = \langle U, X \rangle U$ par une formule du cours. Comme H_t est un noyau de Markov d'après **Q4**., on a $H_t U = U$. Donc, en utilisant le fait admis que $X \mapsto H_t X$ est autoadjoint,

$$p(H_t X) = \langle U, H_t X \rangle U = \langle H_t U, X \rangle U = \langle U, X \rangle U = p(X).$$

18. • De **Q16.**, on tire $\varphi'_Y(t) = -2 q_u(H_t Y)$.

Mais $H_t Y = H_t(X - p(X)) = H_t X - H_t \cdot p(X) = H_t X - p(X)$, la dernière égalité résultant du fait que $H_t U = U$ et que $p(X)$ est colinéaire à U . De la question **17.**, on déduit enfin que $H_t Y = H_t X - p(H_t X)$. Comme u est autoadjoint positif et admet 0 comme valeur propre simple, il résulte alors de **Q 10.** que

$$\varphi'_Y(t) = -2 q_u(H_t X - p(H_t X)) \leq -2 \lambda \|H_t X - p(H_t X)\|^2 = -2 \lambda \|H_t Y\|^2 = -2 \lambda \varphi_Y(t).$$

• On a donc $\varphi'_Y(t) + 2 \lambda \varphi_Y(t) \leq 0$, soit $e^{-2\lambda t} \cdot \frac{d}{dt}(e^{2\lambda t} \varphi_Y(t)) \leq 0$, donc $t \mapsto e^{2\lambda t} \varphi_Y(t)$ décroît sur \mathbb{R}_+ d'où, pour tout $t \geq 0$, $e^{2\lambda t} \varphi_Y(t) \leq \varphi_Y(0)$, soit $\varphi_Y(t) \leq e^{-2\lambda t} \varphi_Y(0)$, soit $\|H_t Y\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|Y\|^2$, soit enfin

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \|H_t X - p(X)\|^2 = \|H_t X - p(H_t X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2.$$

19. Le vecteur U étant unitaire dans E , on a $p(E_i) = \langle E_i, U \rangle U = \pi[i] U$. De **Q18.**, on déduit que

$$\|H_t E_i - \pi[i] U\|^2 = \|H_t E_i - p(E_i)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|E_i - p(E_i)\|^2.$$

Or, le vecteur $E_i - p(E_i) = E_i - \pi[i] U$ a toutes ses coordonnées égales à $-\pi[i]$, sauf la i -ième qui vaut $1 - \pi[i]$. Donc

$$\begin{aligned} \|E_i - p(E_i)\|^2 &= \sum_{j \neq i} \pi[j] \pi[i]^2 + \pi[i] (1 - \pi[i])^2 \\ &= (1 - \pi[i]) \pi[i]^2 + \pi[i] (1 - \pi[i])^2 \\ &= \pi[i] (1 - \pi[i]) \leq \pi[i]. \end{aligned}$$

Donc $\|H_t E_i - \pi[i] U\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \pi[i]$, soit $\|H_t E_i - \pi[i] U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

20. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, posons $u = \frac{t}{2}$, alors $H_u^2 = H_t$ d'après **Q5**. Par ailleurs, H_u est un noyau de Markov π -réversible, donc $\pi H_u = \pi$ d'après **Q11**. Partons alors de la somme S figurant au second membre de l'égalité à démontrer:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^N (H_u[i, k] - \pi[k]) (H_u[k, j] - \pi[j]) \\ &= \sum_{k=1}^N H_u[i, k] H_u[k, j] - \pi[j] \sum_{k=1}^N H_u[i, k] - \sum_{k=1}^N \pi[k] H_u[k, j] + \pi[j] \sum_{k=1}^N \pi[k] \\ &= (H_u)^2[i, j] - \pi[j] \times 1 - (\pi H_u)[j] + \pi[j] \times 1 \\ &= H_t[i, j] - \pi[j] - \pi[j] + \pi[j] \\ &= H_t[i, j] - \pi[j], \end{aligned}$$

ce qu'il fallait obtenir.

21. En posant toujours $u = \frac{t}{2}$, écrivons

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^N \pi[k] \frac{H_u[i, k] - \pi[k]}{\pi[k]} (H_u[k, j] - \pi[j]).$$

On reconnaît alors un produit scalaire dans E , soit $H_t[i, j] - \pi[j] = \langle X, Y \rangle$, en posant pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$Y[k] = H_u[k, j] - \pi[j] \quad \text{et} \quad X[k] = \frac{H_u[i, k] - \pi[k]}{\pi[k]} = \frac{H_u[k, i] - \pi[i]}{\pi[i]}$$

en utilisant le caractère π -réversible de H_u pour la dernière égalité.

Cela revient à dire que $X = \frac{1}{\pi[i]} (H_u E_i - \pi[i] U)$ et que $Y = H_u E_j - \pi[j] U$.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien E , on déduit enfin que

$$\begin{aligned} |H_t[i, j] - \pi[j]| &= |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\| \\ &\leq \frac{1}{\pi[i]} \|H_u E_j - \pi[j] U\| \|H_u E_i - \pi[i] U\| \\ &\leq \frac{1}{\pi[i]} e^{-\lambda u} \sqrt{\pi[j]} e^{-\lambda u} \sqrt{\pi[i]} \\ &\leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}. \end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, on déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j] = \pi[j]$. La matrice H_t a donc pour limite,

lorsque $t \rightarrow +\infty$, la matrice $L = \begin{pmatrix} \pi[1] & \pi[2] & \cdots & \pi[N] \\ \pi[1] & \pi[2] & \cdots & \pi[N] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi[1] & \pi[2] & \cdots & \pi[N] \end{pmatrix} = U\pi$, qui est un noyau de

Markov π -réversible tel que $L^2 = L$ et $\text{rg}(L) = 1$.