Centrale PC 2020 Math 2 - Corrigé

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I.A - Premières propriétés

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Comme $x \mapsto e^{itx}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc sur $X(\Omega)$, et comme $X(\Omega)$ est fini, d'après le théorème de transfert (cas fini), e^{itX} a une espérance et
$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{r} e^{itx_k} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Comme $x \mapsto e^{itx}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc sur $X(\Omega)$, d'après le théorème de transfert (cas dénombrable), e^{itX} admet une espérance si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} e^{itx_n} P(X = x_n)$ converge absolument.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|e^{itx_n} P(X = x_n)| = P(X = x_n)$, donc $\sum\limits_{n\geq 0} |e^{itx_n} P(X = x_n)| = \sum\limits_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1), donc $\sum\limits_{n\geq 0} e^{itx_n} P(X = x_n)$ converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert, e^{itX} admet une espérance et
$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}.$$

3. • **Cas fini, avec les notations de la question 1**
$\phi_X : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}$ est continue comme somme finie de fonctions continues.
• **Cas infini, avec les notations de la question 2**
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto a_n e^{itx_n}$. Alors :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$|f_n(t)| = |e^{itx_n} a_n| = |a_n|,$$
donc $\|f_n\|_\infty = |a_n| = P(X = x_n)$.
Par suite, comme $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum\limits_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1), $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
D'où, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\phi_X = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\exp(itY) = \exp(it(aX + b)) = \exp(itaX)\exp(itb).$$
Or $\exp(itb) \in \mathbb{C}$, donc, par linéarité de l'espérance,
$$\phi_Y(t) = E(\exp(itY)) = E(\exp(itb)\exp(itaX)) = \exp(itb)E(\exp(itaX)) = \exp(itb)\phi_X(at).$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-t \in \mathbb{R}$, donc $\phi_X(-t)$ existe et
$$\phi_X(-t) = E(e^{-itX}) = E\left(\overline{e^{itX}}\right) = \overline{E(e^{itX})} = \overline{\phi_X(t)}.$$
Comme ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in D_{\phi_X}$, $-x \in D_{\phi_X}$, donc
$$\begin{aligned} \phi_X \text{ paire} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(-t) = \phi_X(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \overline{\phi_X(t)} = \phi_X(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I.B - Trois exemples

6. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ est fini et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, donc, d'après la question 1,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{it}p)^k q^{n-k} \\
&= \left(pe^{it} + q\right)^n \quad \text{(d'après le binôme de Newton).}
\end{aligned}$$

7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ est infini et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = pq^{n-1}$, donc, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{itn} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} pe^{it} (qe^{it})^{n-1} \\
&= pe^{it} \frac{1}{1-qe^{it}} \quad \text{(série géométrique de raison } qe^{it} \text{ où } |qe^{it}| = q < 1) \\
&= \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.
\end{aligned}$$

8. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est infini et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, donc, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X=n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{it}) \quad \text{(série exponentielle)} \\
&= \exp(\lambda(e^{it}-1))
\end{aligned}$$

I.C - Image de ϕ_X

9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\phi_X(t)| &= \left| \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P(X=x) \right| \\
&\leq \sum_{x \in X(\Omega)} |e^{itx} P(X=x)| \quad \text{(inégalité triangulaire généralisée)} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1,
\end{aligned}$$

où toutes les sommes sont soit finies, soit convergentes.

10. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + \dfrac{2\pi}{t_0}k$, donc

$$\exp(it_0 x) = \exp\left(it_0\left(a + \frac{2\pi}{t_0}k\right)\right) = \exp(it_0 a + 2i\pi k) = \exp(it_0 a)\exp(2i\pi k) = \exp(it_0 a),$$

donc

$$\begin{aligned}
\phi_X(t_0) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(it_0 x) P(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(it_0 a) P(X=x) \\
&= \exp(it_0 a) \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = \exp(it_0 a),
\end{aligned}$$

donc $|\phi_X(t_0)| = 1$.

11. Comme $|\phi_X(t_0)| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_X(t_0) = e^{i\theta}$.
Posons alors $a = \dfrac{\theta}{t_0} \Leftrightarrow \theta = at_0$ (possible car $t_0 \neq 0$).
On a alors

$$\phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{it_0 x_n} = \exp(it_0 a),$$

donc

$$\exp(-it_0 a)\phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i(t_0 x_n - t_0 a)) = 1.$$

12. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{x_n \in X(\Omega)} P(X = x_n) = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i(t_0 x_n - t_0 a)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

soit, en regroupant tout le monde du même côté,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(1 - \exp(i(t_0 x_n - t_0 a))\right) = 0,$$

donc, en passant à la partie réelle, on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0.$$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a) \geq 0$, donc $a_n \left(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)\right) \geq 0$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ et $x_{n_0} \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors

$$t_0 x_{n_0} - t_0 a \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \text{donc} \qquad \cos(t_0 x_n - t_0 a) < 1,$$

donc $a_{n_0}(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) > 0$.
On aurait alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = \underbrace{a_{n_0}(1 - \cos(t_0 x_{n_0} - t_0 a))}_{>0} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} \underbrace{a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a))}_{\geq 0} > 0,$$

ce qui est exclu d'après la question précédente.
D'où, par l'absurde, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ou $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

14. On a donc

$$\begin{aligned} P\left(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}}^{+\infty} P(X = x_n) \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}}^{+\infty} 0 = 0, \end{aligned}$$

donc $P\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1 - P\left(X \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

II. Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II.A - Première méthode

Remarquons déjà que, pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, $V_m(T)$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

II.A.1.

15. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}\right) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{2T} \int_{-T}^{T} e^{itx_k} e^{-imt} dt\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x_k - m)} dt\right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{ita} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2T} \left[\dfrac{e^{ita}}{ia}\right]_{-T}^{T} & \text{si } a \neq 0 \\ \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} 1 dt & \text{si } a = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e^{iTa} - e^{-iTa}}{2iaT} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} = \operatorname{sinc}(Ta),$$

donc

$$V_m(T) = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x_k - m)} dt\right) = \sum_{k=1}^{r} a_k \operatorname{sinc}(T(x_k - m)).$$

16. • Pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\overbrace{\sin x}^{\text{borné}}}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$.

• Si $m \in X(\Omega)$, alors il existe $i \in [\![1,r]\!]$ tel que $m = x_i$ et, pour tout $k \neq i$, $x_k \neq x_i$, donc $x_k \neq m$.
On a alors, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{sinc}(T(x_k - m)) \\ &= a_i \mathrm{sinc}(0) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} a_k \underbrace{\mathrm{sinc}\,\underbrace{(T\,\overbrace{(x_k-m)}^{\neq 0})}_{\to\pm\infty}}_{\to 0} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} a_i + 0 = a_i = P(X = x_i) = P(X = m). \end{aligned}$$

• Si $m \notin X(\Omega)$, alors $P(X = m) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $x_k \neq m$.
On a alors, pour tout $T > 0$,

$$V_m(T) = \sum_{k=1}^{r} a_k \underbrace{\mathrm{sinc}\,\underbrace{(T\,\overbrace{(x_k-m)}^{\neq 0})}_{\to\pm\infty}}_{\to 0} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = P(X = m).$$

• Dans tous les cas, on a bien $V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} P(X = m)$.

II.A.2.

17. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$,

$$V_m(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}\right)e^{-imt}dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n e^{it(x_n-m)}\right)dt.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : t \in [-T,T] \mapsto a_n e^{it(x_n-m)}$. Alors :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue sur $[-T,T]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [-T,T]$,

$$|h_n(t)| = |e^{itx_n} a_n| = |a_n|,$$

donc $\|h_n\|_\infty^{[-T,T]} = |a_n| = P(X = x_n)$.
Par suite, comme $\sum_{n\geq 0} \|h_n\|_\infty^{[-T,T]} = \sum_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1), $\sum_{n\geq 0} h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-T,T]$.

D'où, d'après le théorème d'interversion $\sum / \int$ en cas de convergence uniforme sur un segment,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n e^{it(x_n-m)}\right)dt \\ &= \frac{1}{2T}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{-T}^{T} a_n e^{it(x_n-m)}\right)dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{2T}\int_{-T}^{T} a_n e^{it(x_n-m)}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{sinc}(T(x_n - m)) \quad \text{(même calcul qu'en question 15)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

18. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^* = D_{g_n}$ par opérations sur les fonctions usuelles.

• Si $x_n = m$, alors, pour tout $h > 0$, $g_n(h) = a_n \mathrm{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right) = a_n \mathrm{sinc}(0) = a_n \underset{h\to 0}{\to} a_n$, donc g_n est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}_n(0) = a_n$.

• Si $x_n \neq m$, alors, pour tout $h > 0$, $g_n(h) = a_n \mathrm{sinc}\underbrace{\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)}_{\to\pm\infty} \underset{h\to 0}{\to} 0$, donc g_n est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}_n(0) = 0$.

• Dans tous les cas, la fonction g_n se prolonge bien en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

19. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{g}_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, si $t > 0$,

$$|\tilde{g}_n(t)| = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{x_n - m}{h}\right) P(X = x_n)\right| \leq P(X = x_n),$$

et, pour $t = 0$, l'inégalité reste valable vu le prolongement fait à la question 18.
On a donc $\|\tilde{g}_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq P(X = x_n)$.
Or $\sum\limits_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et vaut 1), donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 0} \|\tilde{g}_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+}$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 0} \tilde{g}_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

D'où, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $G = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

20. Pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}
V_m(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{(d'après la question 17)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{(car } g_n \text{ et } \tilde{g}_n \text{ coïncident sur } \mathbb{R}_+^*\text{)} \\
&= G\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{(par définition de } G\text{)} \\
&\underset{T\to+\infty}{\to} G(0) \quad \text{(par continuité de } G \text{ sur } \mathbb{R}_+\text{, donc en 0)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0)
\end{aligned}$$

Or $\tilde{g}_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq x_n \\ a_n & \text{si } m = x_n \end{cases}$ (d'après la question 18), donc,

— Si $m \in X(\Omega)$, alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $m = x_i$ et, pour tout $n \neq i$, $x_n \neq x_i$, donc $x_n \neq m$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} V_m(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0) \\
&= \tilde{g}_i(0) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq i}}^{+\infty} \underbrace{\tilde{g}_n(0)}_{=0} \\
&= a_i = P(X = x_i) = P(X = m).
\end{aligned}$$

— Si $m \notin X(\Omega)$, alors $P(X = m) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq m$.
On a alors

$$\lim_{T\to+\infty} V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\tilde{g}_n(0)}_{=0} = 0 = P(X = m).$$

Dans tous les cas, on a bien $V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} P(X = m)$.

II.A.3. Application

21. Notons, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $T > 0$, $W_m(T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_Y(t) e^{-imt} dt$.
Alors, d'après ce qui précède (appliqué à la variable Y, qu'elle soit finie (question 16) ou infinie (question 20)), on a

$$\lim_{T\to+\infty} W_m(T) = P(Y = m).$$

Or, $\phi_X = \phi_Y$, donc, pour tout $T > 0$,

$$W_m(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi_Y(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi_X(t) e^{-imt} dt = m) = V_m(T),$$

donc

$$\lim_{T\to+\infty} W_m(T) = \lim_{T\to+\infty} V_m(T) = P(X = m)$$

(que X soit finie ou infinie d'après les questions 16 et 20).
D'où, par unicité de la limite, on a $P(X = m) = P(Y = m)$.
Ceci étant valable pour tout $m \in \mathbb{R}$, X et Y ont la même loi.

II.B - Deuxième méthode

22. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, comme $ita \in \mathbb{C}$ et $itb \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
K_{a,b}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{2it} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itb)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ita)^n}{n!}}{2it} \\
&= \frac{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(itb)^n}{n!} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ita)^n}{n!}}{2it} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(itb)^n - (iat)^n}{n!}}{2it} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(itb)^n - (iat)^n}{n!(2it)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(ib)^{n-1} - a(ia)^{n-1}}{2 \times n!} t^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(ib)^n - a(ia)^n}{2 \times (n+1)!} t^n
\end{aligned}$$

et cette égalité est encora valable pour $t = 0$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(ib)^n - a(ia)^n}{2 \times (n+1)!} 0^n = \frac{b(ib)^0 - a(ia)^0}{2 \times 1!} = \frac{b-a}{2} = K_{a,b}(0).$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $K_{a,b}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(ib)^n - a(ia)^n}{2 \times (n+1)!} t^n$, donc $K_{a,b}$ est développable en séries entières sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

23. • Si $N = 0$, $F_N : x \mapsto 0$, donc $F_n'(x) = 0 = 0 \times \operatorname{sinc}(0x)$, donc l'égalité est vérifiée.
• Soit à présent $N \in \mathbb{N}^*$ et posons $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times [-N,N] \mapsto K_{a,x}(t)$.
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t) = K_{a,x}(t)$ est continue sur le segment $[-N,N]$ (d'après la question précédente), donc intégrable sur $[-N,N]$.
— Pour tout $t \in [-N,N] \setminus \{0\}$, $x \mapsto f(x,t) = K_{a,x}(t) = \frac{e^{itx} - e^{ita}}{2it}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, (pour tout $t \in [-N,N] \setminus \{0\}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{itx}}{2}.$$

Pour $t = 0$, $x \mapsto f(x,0) = K_{a,x}(0) = \frac{x-a}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{2}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} e^{itx}/2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

et cette fonction est continue par morceaux sur $[-N,N]$ (car $\lim_{t \to 0^+} e^{itx}/2$ et $\lim_{t \to 0^-} e^{itx}/2$ sont finies (et valent $1/2$).
en fait, on a même la continuité, mais ce n'est pas utile ici.
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [-N,N]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2} = \varphi(t) \quad \text{(valable aussi pour } t = 0\text{)},$$

où φ est intégrable sur $[-N,N]$ (car constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F_N : x \mapsto \int_{-N}^{N} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_N'(x) = \int_{-N}^{N} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{itx}}{2ix}\right]_{-N}^{N} & \text{si } x \neq 0 \\ N & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} N\frac{\sin(Nx)}{Nx} & \text{si } x \neq 0 \\ N\operatorname{sinc}(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} = N\operatorname{sinc}(Nx).$$

24. $K_{a,a}$ est la fonction nulle, donc $F_n(a) = 0$.
Par suite, comme F_N' est continue sur $[a,b]$, on a

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = F_n(b) = F_n(b) - F_n(a) = \int_a^b F_n'(x)dx = \int_a^b N\operatorname{sinc}(Nx)dx.$$

Posons alors le changement de variable $s = Nx$. ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-N, N]$ et on a $dx = \dfrac{1}{N}ds$, donc

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = \int_{a}^{b} N\text{sinc}(Nx)dx = \int_{Na}^{Nb} \text{sinc}(s)ds.$$

25. • La fonction sinc est continue sur $[0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 \text{sinc}(s)ds$ existe.

• Posons $u'(s) = \sin(s)$, $u(s) = -\cos(s)$, $v(s) = \dfrac{1}{s}$, $v'(s) = -\dfrac{1}{s^2}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

$u(s)v(s) = -\dfrac{\overbrace{\cos(s)}^{\text{borné}}}{s} \underset{s\to+\infty}{\to} 0.$

D'où, par intégration par partie, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \text{sinc}(s)ds = \int_1^{+\infty} u'(s)v(s)ds$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(s)v'(s)ds = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(s)}{s^2}ds$.

Or, pour tout $s \geq 1$, $\dfrac{\cos(s)}{s^2} = \dfrac{O(1)}{s^2} = \underset{s\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$, et, comme $s \mapsto \dfrac{1}{s^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), par comparaison, $s \mapsto \dfrac{\cos(s)}{s^2}$ est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(s)}{s^2}ds$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \text{sinc}(s)ds$ converge.

• On a donc bien établi la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \text{sinc}(s)ds$.

26. • la fonction sinc est paire, donc on a, par parité,

$$\int_{-\infty}^{0} \text{sinc}(s)ds = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(s)ds = \pi.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on a :

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = \int_{Na}^{Nb} \text{sinc}(s)ds \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^{Nb} \text{sinc(s)}ds - \int_0^{Na} \text{sinc}(s)ds.$$

Or, si $c > 0$,

$$\int_0^{Nc} \text{sinc(s)}ds \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \text{sinc}(s)ds = \frac{\pi}{2} \quad \text{(par définition d'une intégrale convergente)},$$

si $c = 0$,

$$\int_0^{Nc} \text{sinc(s)}ds = \int_0^{0} \text{sinc}(s)ds = 0 \underset{N\to+\infty}{\to} 0,$$

et, si $c < 0$,

$$\int_0^{Nc} \text{sinc(s)}ds \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^{-\infty} \text{sinc}(s)ds = -\frac{\pi}{2},$$

donc, en distinguant les différents cas possibles (on a $b > a$), on a

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = \int_0^{Nb} \text{sinc(s)}ds - \int_0^{Na} \text{sinc}(s)ds \underset{N\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \text{ et } b > 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \pi/2 & \text{si } a < 0 \text{ et } b = 0 \\ \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}.$$

27. Reprenons les notations de la question 1.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k e^{-itx_k}\right) K_{a,b}(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} e^{-itx_k} K_{a,b}(t)dt\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) \quad \text{(par définition de } K\text{)}
\end{aligned}$$

Or $a - x_k \neq 0$ et $b - x_k \neq 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt \underset{N\to+\infty}{\to} \begin{cases} 1 & \text{si } a - x_k < 0 \text{ et } b - x_k > 0 \Leftrightarrow a < x_k < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)dt &= \sum_{k=1}^{r} a_k\left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) \quad \text{(par définition de } K\text{)} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\in]a,b[}}^{r} a_k\left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\notin]a,b[}}^{r} a_k\left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{\to} \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\in]a,b[}}^{r} a_k \times 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\notin]a,b[}}^{r} a_k \times 0 \quad \text{(combinaison linéaire (finie) de limites finies)} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\in]a,b[}}^{r} P(X = x_k) = P(a < X < b).
\end{aligned}$$

III. Régularité de ϕ_X

III.A -

28. • Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq k$.
— Si $|x| \leq 1$, alors $|x|^j \leq 1 \leq 1 + |x|^k$.
— Si $|x| \geq 1$, alors $|x|^j \leq |x|^k \leq 1 + |x|^k$.
On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^j \leq 1 + |x|^k$
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^j P(X = x_n)| = |x_n|^j P(X = x_n) \leq P(X = x_n) + |x_n|^k P(X = x_n)$.
Or $\sum_{n\geq0} P(X = x_n)$ converge (et vaut 1) et $\sum_{n\geq0} |x_n|^k P(X = x_n)$ converge d'après le théorème de transfert (car X a un moment d'ordre k), donc $\sum_{n\geq0} P(X = x_n) + |x_n|^k P(X = x_n)$ converge (comme somme de séries convergentes), et, finalement, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq0} |x_n^j P(X = x_n)|$ converge, donc $\sum_{n\geq0} x_n^j P(X = x_n)$ converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert (cas infini), X^j a une espérance, donc X a un moment d'ordre j.

29. D'après la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(X = x_n).$$
Posons à nouveau, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{itx_n} P(X = x_n)$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles et
$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n^{(j)}(t) = (ix_n)^j e^{itx_n} P(X = x_n).$$
— $\sum_{n\geq0} f_n$ converge simplement (car uniformément d'après la question 3) sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $j \in [[1, k]]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$|f_n^{(j)}(t)| = |ix_n|^j.|e^{itx_n}|.P(X = x_n) = |x_n|^j P(X = x_n),$$
donc $\|f_n^{(j)}\|_\infty = |x_n|^j P(X = x_n)$.
D'où $\sum_{n\geq0} \|f_n^{(j)}\|_\infty = \sum_{n\geq0} |x_n|^j P(X = x_n)$ converge (d'après la question précédente), donc $\sum_{n\geq0} f_n^{(j)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
D'où, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $j \in [[1, k]]$,
$$\phi_X^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ix_n)^j e^{itx_n} P(X = x_n).$$

30. Par suite,
$$\phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ix_n)^k e^{i0x_n} P(X = x_n) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n) = i^k E(X^k),$$
donc $E(X^k) = i^{-k}\phi_X^{(k)}(0) = (-i)^k \phi_X^{(k)}(0)$.

III.B -

31. Comme ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 sous la forme :

$$\phi_X(t) = \phi_X(0) + t\phi'_X(0) + \frac{t^2}{2}\phi''_X(0) + o(t^2).$$

Par suite, comme $h \to 0$, on a, pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{4h^2}\left(2\phi_X(0) - \left(\phi_X(0) + 2h\phi'_X(0) + \frac{4h^2}{2}\phi''_X(0) + o(h^2)\right) - \left(\phi_X(0) - 2h\phi'_X(0) + \frac{4h^2}{2}\phi''_X(0) + o(h^2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{4h^2}(-4h^2\phi''_X(0) + o(h^2)) \\ &= -\phi''_X(0) + o(1) \underset{h\to 0}{\to} -\phi''_X(0). \end{aligned}$$

32. A l'aide de la définition de ϕ_X, on a, pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{4h^2}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i0} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2ihx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-2ihx_n}\right) \\ &= \frac{1}{4h^2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(2 - e^{2ihx_n} - e^{-2ihx_n}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{a_n}{4h^2}(e^{ihx_n} - e^{-ihx_n})^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{h^2}\left(\frac{e^{ihx_n} - e^{-ihx_n}}{2i}\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}. \end{aligned}$$

33. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} = a_n\frac{(hx_n)^2 + o(h^2)}{h^2} = a_n x_n^2 + o(1) \underset{h\to 0}{\to} a_n x_n^2.$$

• Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$$

comme somme finie de limites finies.
Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n\dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \geq 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} = f(h),$$

donc, en passant à la limite quand $h \to 0$ dans cette inégalité (les deux limites existent), on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \leq \lim_{h\to 0} f(h) = \phi''_X(0).$$

• La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. De plus, elle est croissante (car $a_n x_n^2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), donc elle converge.
Par suite, $\sum_{n\geq 0} a_n x_n^2$ converge, donc converge absolument (série à termes positifs), donc, d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance, donc X admet un moment d'ordre 2.

III.C -

34. Si $\alpha = 0$, alors on a $E(X^{2k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^{2k} P(X = x_n) = 0$, donc, comme une somme de terme positifs est nul si et seulement si chaque terme est nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{2k} P(X = x_n) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0 \text{ ou } P(X = x_n) = 0.$$

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(X = n_0) \neq 0$, donc on a $x_{n_0} = 0$.
Comme les x_n sont deux à deux distincts, on a alors $x_n \neq 0$ pour tout $n \neq n_0$, donc $P(X = x_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$.
En ré-utilisant $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$, on obtient alors $P(X = x_{n_0}) = 1$.
La variable X est donc une variable quasi certaine égale à $x_{n_0} = 0$.
Et, par suite, dans ce cas, X admet des moments de tout ordre, et ils sont tous nuls.

35. • Une telle variable Y existe car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y = x_n) \geq 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^{2k} = \frac{1}{\alpha}E(X^{2k}) = 1 \quad \text{(par le théorème de transfert).}$$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_Y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(Y = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n}\frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha} = \frac{(-1)^k}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(ix_n)^{2k} e^{itx_n} a_n = \frac{(-1)^k}{\alpha}\phi_X^{(2k)}(t)$$

où la dernière égalité est justifiée par la question 30, dont les hypothèses sont vérifées.

On a donc $\phi_Y = \dfrac{(-1)^k}{\alpha}\phi_X^{(2k)}$.

• Or ϕ_X est supposée de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$, donc $\phi_X^{(2k)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

36. Comme ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, Y admet un moment d'ordre 2 (d'après la question 33).

D'où, d'après le théorème de transfert, la série $\sum_{n\geq 0} x_n^2 P(Y = x_n) = \dfrac{1}{\alpha}\sum_{n\geq 0} a_n x_n^{2k+2}$ converge absolument, donc, toujours d'après le théorème de transfert, X^{2k+2} a une espérance, donc X a un moment d'ordre $2k+2$.

37. Montrons le résultat par récurrence sur k, en notant HR_k la propriété à démontrer.

Initialisation : Pour $k = 1$, si ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$, alors X a un moment d'ordre 2 d'après la question 33.
On a donc bien HR_1.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée.
Supposons alors ϕ_X de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$.
Comme ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$, X admet un moment d'ordre $2k$ d'après HR_k.
On a donc ϕ_X de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$ et X admet un moment d'ordre $2k$, donc, d'après les question 34 et 36 (cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$), X admet un moment d'ordre $2k+2$. On a bien HR_{k+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$, alors X admet un mement d'ordre $2k$.

IV. Développement en série entière de ϕ_X

IV.A -

38. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{ita} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(ita)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(ia)^n}{n!}t^n$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par suite, $\phi_X : t \mapsto \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions développables en série entière et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k} \\
&= \sum_{k=1}^{r} a_k \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix_k)^n}{n!}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{r} a_k \frac{(ix_k)^n}{n!}t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(it)^n}{n!}\sum_{k=1}^{r} a_k x_k^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(it)^n}{n!}E(X^n).
\end{aligned}$$

IV.B -

39. La fonction $\psi : t \mapsto e^{it}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \psi^{(k)}(t) = i^k e^{it}.$$

D'où, d'après le théorème de Taylor-reste intégral appliqué à ψ entre 0 et y, on a :

$$\begin{aligned}
e^{iy} = \psi(y) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}y^k + \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(iy)^k}{k!} + \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)dt.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \right| &= \left| \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_0^y \left| \frac{(y-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t) \right| dt \quad \text{(inégalité triangulaire généralisée avec } y \geq 0\text{)} \\
&= \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} |\psi^{(n+1)}(t)| dt = \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} dt \quad (\text{car } |\psi^{(n+1)}(t)| = |i^{n+1} e^{it}| = 1) \\
&= \left[-\frac{(y-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^y = \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

et, pour tout $y < 0$,

$$\begin{aligned}
\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \right| &= \left| \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_y^0 \left| \frac{(y-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t) \right| dt \quad \text{(inégalité triangulaire généralisée avec } y < 0\text{)} \\
&= \int_y^0 \frac{(t-y)^n}{n!} |\psi^{(n+1)}(t)| dt = \int_y^0 \frac{(t-y)^n}{n!} dt \quad (\text{car } |\psi^{(n+1)}(t)| = |i^{n+1} e^{it}| = 1) \\
&= \left[\frac{(t-y)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_y^0 = \frac{(-y)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

On a donc bien, dans tous les cas, l'inégalité souhaitée.

40. Pour tout $t \in \left[-\frac{R}{e}, \frac{R}{e} \right]$, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left| \phi_X(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^k \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} x_n^k \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(e^{itx_n} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(itx_n)^k}{k!} \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left| e^{itx_n} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(itx_n)^k}{k!} \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{|tx_n|^{K+1}}{(K+1)!}
\end{aligned}$$

où cette série, qui vaut $\frac{t^{K+1}}{(K+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|^{K+1}$ converge (car X a un moment d'ordre $K+1$), et cette convergence justifie a posteriori la convergence de la série de la ligne précédente.
On a donc

$$\begin{aligned}
\left| \phi_X(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) \right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{|tx_n|^{K+1}}{(K+1)!} \\
&= \frac{|t|^{K+1}}{(K+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|^{K+1} \\
&= \frac{|t|^{K+1}}{(K+1)!} E(|X|^{K+1}) \quad \text{(d'après le théorème de transfert)} \\
&= O\left(\frac{R^{K+1}}{e^{K+1}(K+1)!} \frac{(K+1)^{K+1}}{R^{K+1}} \right) \quad (\text{par hypothèse sur } E(|X|^n) \text{ et } t) \\
&= O\left(\frac{(K+1)^{K+1}}{e^{K+1} \left(\frac{K+1}{e}\right)^{K+1} \sqrt{2\pi(K+1)}} \right) \quad \text{(formule de Stirling)} \\
&= O\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(K+1)}} \right) \underset{K \to +\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{K \to +\infty} \phi_X(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) = 0,$$

donc $\lim_{K \to +\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) = \phi_X(t)$, donc $\sum_{k \geq 0} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) = \phi_X(t).$$

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet de cette année introduit à la transformation de Fourier des variables aléatoires réelles. On associe à la variable aléatoire X une fonction d'une variable réelle $t \mapsto \phi_X(t)$ appelée *fonction caractéristique*. Dans le cas de variables aléatoires à densité, on obtient effectivement la transformée de Fourier (inverse) de la densité, mais le cas étudié par le problème est celui des variables aléatoires discrètes. Des parties importantes du programme d'analyse sont ainsi abordées : intégrales dépendant d'un paramètre, formule de Taylor, séries entières, variables aléatoires discrètes.

Analyse globale des résultats

L'énoncé assez élémentaire laissait peu de place à l'initiative et certains candidats ont bien fait l'effort de justifier les propriétés utilisées. De trop nombreuses copies, en revanche, ne découpent pas suffisamment les raisonnements, donnant trop d'arguments tout en omettant parfois les arguments cruciaux. De telles productions, laissant au correcteur le soin de sélectionner les arguments réellement utiles, ont été logiquement sanctionnées. Rappelons la simple nécessité de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème en donnant le numéro de la question invoquée.

Si l'utilisation de la convergence normale et les méthodes d'interversion somme/intégrale sont plutôt bien assimilées, ce sont paradoxalement des outils bien plus basiques et même les techniques du secondaire qui sont parfois assez mal maitrisés. Les nombres complexes sont une grande source d'erreurs. Les techniques pour calculer les limites ou justifier l'existence d'une intégrale, de même que la manipulation des séries entières, ne sont comprises que dans les meilleures copies.

Du point de vue strictement matériel on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés bien choisis, sans parler du choix d'une encre stable et assez foncée en vue de la numérisation.

Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats à améliorer substantiellement leur prestation.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I.A – Premières propriétés

Q1. On note parfois une certaine incompréhension du théorème de transfert. Remarquons, ici, que $P(X = x)$ et $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})$ ne sont pas nécessairement égales.

Q2. Trop de candidats font des encadrements entre des nombres complexes non réels.

Q3. La convergence normale est souvent mentionnée mais sans justification probante (majoration de la valeur absolue de la somme totale par exemple), de même pour la convergence uniforme qu'il ne suffit pas de mentionner sans justification pour qu'elle soit effective.

Q4. Des candidats écrivent $\mathrm{e}^{itaX} = (\mathrm{e}^{itX})^a$, ce qui n'a pas de sens puisque e^{itX} est un complexe. On voit également $E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}taX}) = \left(E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})\right)^a$.

Notons aussi que l'énoncé souhaitait une expression de $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b, ce qui n'est pas la même chose qu'en fonction de $\phi_X(t)$, a et b.

Q5. Une question abordée avec réticence et un fort taux d'échec. Les nombres complexes dans ce contexte sont mal manipulés. On a vu souvent l'erreur $\phi_X(-t) = \phi_X(t)^{-1}$ avec la conséquence que ϕ_X ne peut être paire que si elle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

I.B – Trois exemples

Q7. Une certaine méconnaissance de la loi géométrique est à déplorer. Beaucoup considèrent la loi géométrique comme finie entre 1 et un mystérieux nombre n, d'autres attribuent une probabilité p à $X = 0$. Pour sommer une série géométrique, peu de candidats pensent à justifier que le module de la raison est strictement inférieur à 1.

I.C – Image de ϕ_X

Q10. Certains candidats éprouvent des difficultés à repérer et à expliquer avec suffisamment de détails le raisonnement. Quelques candidats ne maitrisent pas le lien entre un nombre complexe de module 1 et les nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Q11. De nombreux candidats semblent désemparés avec une question du type « montrer qu'il existe un réel a tel que... ». Par exemple, certains partent du résultat et concluent que, puisque les modules de $\phi_X(t_0)$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 a}$ valent 1, ils obtiennent bien le résultat. D'autres prennent un a qui dépend de n.

Q13. Pour quelques candidats, une somme nulle ne doit comporter que des termes nuls sans se soucier d'une hypothèse sur la positivité de ceux-ci. D'autres candidats raisonnent sur la somme obtenue à la question précédente comme sur une série entière.

Beaucoup transforment « pour tout n si $a_n \neq 0$ alors » en « si pour tout n $a_n \neq 0$ alors ».

Q14. La difficulté de nombre de candidats à simplement synthétiser ce qui a été fait auparavant est vraiment regrettable.

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire réelle

II.A – Première méthode

Q15. Certains candidats ne font pas la différence entre somme finie et série et veulent appliquer un théorème d'interversion série-intégrale quand la simple linéarité de l'intégrale suffit. La majorité a oublié le cas $x_n = m$. Si certains séparent bien deux cas : « si $x_n - m \neq 0$ » et « si $x_n - m = 0$ », il arrive toutefois que ce dernier cas signifie pour eux que « pour tout n, $x_n - m = 0$ ».

Q16. Des difficultés à justifier correctement que $\operatorname{sinc}(T(x_n - m))$ tend vers 0 en l'infini. Rappelons que pour prouver que $(u_n)_n$ tend vers 0 on peut simplement et sans danger majorer $|u_n|$ par un terme (positif) convergeant vers 0. Les cas $m \in X(\Omega)$ et $m \notin X(\Omega)$ n'ont pas assez été distingués. Dès lors beaucoup de confusion lorsque dans la question précédente les candidats oublient le cas $x_n = m$.

Q17. Dans cette partie du problème, de trop nombreux candidats se sont contentés d'affirmer que les raisonnements étaient strictement analogues à des questions déjà faites, en l'occurrence les questions Q15 et Q16, mais aussi Q2 et Q3. Un peu de bon sens devrait suggérer que telle n'est pas la réponse attendue.

Q20. Question rarement bien traitée, trop peu de candidats ont écrit explicitement le lien entre $V_m(T)$ et $G(1/T)$.

II.B – Deuxième méthode

Q22. Bien qu'abordée dans deux tiers des copies, c'est probablement la question la moins bien traitée. Rares sont les candidats capables de faire apparaitre un développement en série entière et encore plus rares ceux qui justifient ou même remarquent que le rayon de convergence est infini ou au moins non nul. Dans l'essentiel des copies apparait la série exponentielle sans simplification et une valeur de limite non justifié pour dire qu'elle est continue et même C^∞.

Des rédactions du type « pour $t = 0$, $K_{a,b}(t) = \frac{1}{2}(b-a)$ est une constante et est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ » sans faire le lien avec ce qui se passe quand $t \neq 0$ mettent en évidence une grande confusion pour les notions de régularité des fonctions.

Q23. Assez bien traitée dans l'ensemble, la calculatrice autorisée pour l'épreuve pouvant aider à se souvenir des hypothèses.

Les candidats ont cependant du mal avec l'expression de $\partial_x K$ et la domination (on voit parfois une majoration par une exponentielle complexe), mais dans l'ensemble les hypothèses sont assez correctement mises en avant.

Q24. Oubli fréquent de l'hypothèse C^1 sur F_N pour pouvoir dire que $\int_a^b F_N' = F_N(b) - F_N(a)$. Une erreur fréquente fait apparaitre $\int_{-N}^{N} \frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$

Q25. Un taux d'échec surprenant pour un exercice aussi classique. La rédaction est souvent confuse et inexacte, par exemple : $(\sin x)/x$ tend vers 0 ou bien $(\cos x)/x^2 < 1/x^2$, donc l'intégrale converge. Il convient de rappeler que les théorèmes de comparaisons s'appliquent sur les intégrales de fonctions positives et de passer par la convergence absolue de $(\cos x)/x^2$.

Q26. Rarement entièrement traitée, mais parfois bien faite.

Q27. Même constat.

III Régularité de ϕ_X

Une partie plus rarement traitée et parfois juste survolée.

Q28. Dans cette question, comme pour d'autres, beaucoup de candidats sont allés trop vite. Certains se sont précipités dans une étude de fonction — ce qui pouvait certes fonctionner, fait soigneusement — mais beaucoup ont cru que nécessairement la fonction qu'ils étudieraient serait croissante, ce qui pour $x \mapsto x^j - x^k$ n'était pas le cas...

Q29, **Q30**. La terminologie peut-être abusive « X d'espérance finie » pour dire que X est intégrable produit une certaine confusion chez les candidats les moins assurés. On ne sait plus très bien si on doit prouver l'existence pour X d'un moment d'ordre j, ou que $E(|X|^j)$ est fini ou même « $E(X^j)$ est fini ».

Q31. Assez décevant pour une question très classique de première année de CPGE, peu faite et souvent sans rigueur.

Q33. Presque aucune solution correcte. Une preuve rapide consisterait à majorer les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2$ par le sup de f au voisinage de 0 (fini par continuité grâce à Q 31), en effet $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n \sin^2(hx_n)/h^2$ avec $\sum_{n=0}^{N} a_n \sin^2(hx_n)/h^2 \leqslant f(h)$ par Q 32.

Q35, **Q36**. L'enchainement des questions et le lien avec Q29 et Q33 sont en général mal perçus.

Q37. Une récurrence vraiment facile dont l'hérédité n'a pourtant pas été du tout bien rédigée : le caractère C^{2k+2} de ϕ_X (seule hypothèse dans l'hérédité) donnant l'existence d'un moment d'ordre $2k$ pour X n'a quasiment été jamais expliqué : les candidats ont, eux, supposé à la fois que ϕ_X est de classe C^{2k+2} et que X admet un moment d'ordre $2k$... C'était utile pour les questions 35 et 36, mais pas pour 37.

IV Développement en série entière de ϕ_X

Peu abordée sereinement, à part la question 38, et seule la question 39 a été plutôt bien réussie par les meilleurs.

Q38. Trop peu de candidats justifient correctement le fait que ϕ_X soit développable en série entière. La plupart des candidats se contentent d'écrire des égalités, certains permutant une somme infinie avec une espérance ou avec une autre somme infinie (pour ceux qui ne se placent pas dans le cas où $X(\Omega)$ est fini contrairement à ce qui est précisé dans l'énoncé) sans se préoccuper de la légitimité de cette opération.

Q39. La formule de Taylor avec reste intégral n'est maitrisée que par peu de candidats ; ceux qui l'énoncent sans erreur vont hélas trop vite dans leurs majorations d'intégrales, défaut présent ailleurs dans les copies. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas au programme, on ne peut donc pas l'utiliser.

Conclusion

Les correcteurs relèvent cette année une hétérogénéité frappante. Quelques copies sont bien rédigées, de façon claire, structurée, concise. Mais la présence de quelques bonnes copies donnant un traitement correct de l'ensemble du problème ne doit pas surprendre, s'agissant d'un énoncé très abordable. Par contre, la plupart des copies sont assez mal rédigées, à la fois quant à la propreté (en termes de ratures, etc.) et à la rédaction proprement dite (peu de phrases, beaucoup de symboles $\forall$ ou $\implies$ mal à propos). Sur le fond, il est assez alarmant qu'une moitié des candidats ne peut finalement obtenir qu'un quart des points du barème. Peut-être faut-il y voir une conséquence des perturbations de l'enseignement subies cette année. Cette impression est renforcée par la relative abondance parmi les notes moyennes de copies dont le niveau est assez bon mais qui ne traitent qu'une partie du problème, comme si les candidats avaient mal géré leur temps faute d'entrainement adéquat.