



Marches aléatoires, adjoint et polynômes orthogonaux

À rendre au plus tard le mardi 18 février 2025

Ce DM est très largement facultatif. Lisez l'énoncé, et traitez ce que vous voulez traiter (sans grapiller à chacune des trois parties).

1 Ivrogneries circulaires

1.1 De $\mathbb{Z}$ au cercle trigonométrique

Un ivrogne Y erre dans $\mathbb{Z}$; son cousin X erre sur le cercle trigonométrique. « Plus précisément » on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k est une variable aléatoire (le k -ième pas dans $\mathbb{Z}$) à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(U_k = 1) = \mathbb{P}(U_k = -1) = 1/2$, les variables U_k étant globalement indépendantes. On fixe un angle $\alpha \in]0, \pi[$, et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \sum_{k=1}^n U_k \quad \text{et} \quad X_n = e^{i\alpha Y_n}$$

On définit par ailleurs $Y_0 = 0$ et $X_0 = 1$.

1. Déterminer les lois de Y_1 et Y_2 .
2. Calculer l'espérance et la variance de U_1 . En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'espérance et la variance de Y_n .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y_n = -n + 2j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. Calculer l'espérance de X_n .

1.2 Autre calcul de l'espérance de X_n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer : $X_{n+1} = \begin{cases} e^{i\alpha} X_n & \text{avec probabilité } 1/2 \\ e^{-i\alpha} X_n & \text{avec probabilité } 1/2 \end{cases}$
2. Exprimer, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = e^{ik\alpha})$ à l'aide de probabilités d'événements de la forme $X_n = e^{ij\alpha}$.
3. À l'aide des deux questions précédentes, trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1})$ puis conclure.

1.3 Répartition asymptotique sur le cercle trigonométrique

Dans toute cette partie, on fixe $N \geq 3$ un entier IMPAIR et on suppose $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. On note $\omega = e^{i\alpha} = e^{2i\pi/N}$, et enfin, $\mathbb{U}_N$ désigne l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^N = 1$.

1. Que vaut ω^N ? Expliciter $\mathbb{U}_N$ à l'aide de ω (on ne demande pas de preuve). Représenter $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_5$.

- Exprimer $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$ et $X_3(\Omega)$ à l'aide de ω . Les représenter sur le cercle trigonométrique. Que vaut $X_n(\Omega)$ lorsque n est assez grand ? On pourra prendre $N = 5$ pour se fixer les idées.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, Z_n le vecteur colonne décrivant les probabilités de présence au temps n de

$$\text{l'ivrogne aux différents points « atteignables » du cercle trigonométrique : } Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = \omega) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = \omega^{N-1}) \end{pmatrix}$$

- Exhiber (en justifiant) une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = AZ_n$.

Dans toute la suite du problème, on considère $J \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et les $V_k \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(N-1)k} \end{pmatrix}$$

- Vérifier que les V_k constituent une base de vecteurs propres de J .
On commencera calmement par V_0 et V_1 !
- Calculer $J^T V_k$. En déduire que A est diagonalisable ; expliciter $P \in \text{GL}_N(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. On ne demande pas de calculer P^{-1} .
- Vérifier que les valeurs propres de A autres que 1 sont toutes de module strictement inférieur à 1. Que peut-on en déduire pour D^n puis A^n lorsque n tend vers $+\infty$?
- Que vaut PV_0 ? En déduire la valeur de $P^{-1}Z_0$.
- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = \omega^k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{N}$. Conclusion ?

1.4 Un peu de Python

On dispose de la fonction `random` telle que pour $a, b \in \mathbb{N}$, l'appel de `random(a, b)` renvoie un entier aléatoire entre a et b inclus, avec probabilité uniforme.

- Écrire une fonction `marche` prenant en entrée un paramètre $n \in \mathbb{N}^*$, réalisant n pas et retournant la position de l'ivrogne (dans $\mathbb{Z}$) après ces n pas.
- Pour réaliser une marche sur le cercle trigonométrique, est-il préférable de prendre l'exponentielle d'une marche dans $\mathbb{Z}$ ou bien calculer à la volée des exponentielles ?
Par « calculer des exponentielles », on entend « évaluer des cosinus et des sinus ».
- Écrire une fonction `moyenne` telle que `moyenne(n, alpha, nb_marches)` réalise `nb_marches` marches aléatoires de n pas sur le cercle trigonométrique (avec des « pas angulaires » de α), et retourne la moyenne des positions obtenues à l'issue de chacune de ces marches.
On pourra retourner un couple (parties réelle/imaginaire), ou un complexe via `complex(a, b)`
- À quoi peut-on s'attendre comme résultat asymptotique (i.e. : avec `nb_marches` « grand ») ?

2 Autour de l'adjoint

Dans tout ce problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n .

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
(a) Soit $y \in E$. Montrer qu'il existe un unique $z \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|z \rangle$.
On note $u^*(y) = z$, et on a ainsi :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u^*(y) \rangle.$$

L'application u^* , qui va de E dans E , s'appelle l'adjoint de u .

- (b) Montrer que u^* est linéaire.
- (c) Montrer que si $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda u_1 + u_2)^* = \lambda u_1^* + u_2^*$.
Bref : $u \mapsto u^$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$!*
- 2. Expliciter u^* lorsque :
 - (a) u est une homothétie ($x \mapsto \lambda x$) ;
 - (b) u est une projection orthogonale ;
 - (c) u est une symétrie orthogonale ;
 - (d) u est une isométrie vectorielle (un automorphisme orthogonal).*Dans chaque cas, on établira une relation de la forme $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|v(y) \rangle$ avant de conclure soigneusement.*
- 3. On suppose que $\mathcal{E}$ est une base de E .
 - (a) Rappeler (sans preuve) comment calculer $\langle x|y \rangle$ lorsqu'on dispose des coordonnées X et Y de x et y dans $\mathcal{E}$, ainsi que de la matrice du produit scalaire dans $\mathcal{E}$.
 - (b) Montrer que si $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E , alors $\text{Mat}(u^*, \mathcal{F}) = \text{Mat}(u, \mathcal{F})^T$.
 - (c) Retrouver alors les résultats de la question précédente.
- 4. On va caractériser ici les projections orthogonales de rang donné.
 - (a) Soient u une projection orthogonale de rang r et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
 En décomposant chaque e_i selon une base adaptée, montrer : $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = r$.
 - (b) Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ est une base orthonormée de E , alors $\text{tr}(v) = \sum_{i=1}^n \langle v(e_i)|e_i \rangle$.
 - (c) En déduire que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux bases orthonormées de E et $w \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$\sum_{i=1}^n \|w(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|w(f_i)\|^2.$$

- (d) À l'aide du résultat précédent, reprendre la question 4.(a)
- (e) On suppose maintenant que u est une projection sur un sous-espace de dimension r , et $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = r$ pour une certaine base orthonormée $\mathcal{E}$. Montrer que u est une projection orthogonale.

3 Polynômes de Laguerre

- 1. *Préliminaires*
 - (a) Justifier le fait que lorsque $R \in \mathbb{R}[X]$, l'application $t \mapsto R(t)e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
 - (b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. (On pourra établir une relation de récurrence entre les I_n .)
 On définit, pour $P, Q \in E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.
 - (c) Justifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E .
- 2. *Une base orthonormée.*
 - (a) Justifier l'existence d'une base orthogonale de E constituée de polynômes unitaires (coefficient dominant égal à 1).
 - (b) En s'intéressant, pour $n \in \mathbb{N}$, à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, prouver l'unicité d'une telle base.
 - (c) Calculer explicitement une base orthonormée (P_0, P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 3. *Deux bornes inférieures.*

- (a) Déterminer la borne inférieure (si elle existe) de

$$\varphi(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 e^{-t} dt$$

lorsque (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$.

- (b) Même chose avec

$$\psi(a, b, c) = \int_0^{+\infty} (t^3 - (at^2 + bt + c)) e^{-t} dt$$

(sans carré!)

4. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$: $Q_n(t) = (-1)^n e^t (t^n e^{-t})^{(n)}$. (Il est question d'une dérivée n -ième...)

- (a) Vérifier que Q_n est une application polynomiale.

On assimilera maintenant Q_n à un polynôme...

- (b) Déterminer Q_k pour $k \leq 3$. Donner¹ le degré et le coefficient dominant de Q_n , pour $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Montrer² que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- (d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

- (e) Établir une relation entre les Q_n et les P_n vus plus haut.

- (f) Il vous reste du temps? Montrez que P_n (vu comme membre d'une famille de polynômes orthogonaux) possède n racines distinctes dans $]0, +\infty[$.

- (g) Il vous reste du temps? Montrez à l'aide du lemme de Rolle (et d'une petite généralisation!) que Q_n possède n racines distinctes dans $]0, +\infty[$.

1. Et OUI, je veux une preuve!

2. Pour d'éventuelles (...) intégrations par parties dans le calcul de $\langle X^k | P_n \rangle$, on passera soigneusement par $\int_0^T$ pour la première, et on pourra aller plus vite pour les autres.