



# Khôlles : quinzaine numéro 9

*Du 10 au 21 mars 2025*

Pour les dernières semaines, les collés peuvent dire qu'ils ne souhaitent pas de question de cours. Ils doivent néanmoins évidemment connaître et savoir appliquer précisément les théorèmes !

## 1 Première semaine : préhilbertiens et ÉDL

- Endomorphismes autoadjoints : théorème spectral sans  $E$  à la fin (géométrique et matriciel).
- Diverses applications telle que l'étude des extrémums de  $\frac{\langle u(x)|x \rangle}{\|x\|^2}$ .
- Endomorphismes symétriques (définis) positifs. Il faut savoir prouver l'équivalence entre «  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$  » et « pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x)|x \rangle \geq 0$  » (et variantes strictes/matricielles).
- Équations différentielles linéaires : rappels du cours de première année (structure des espaces de solution – vectoriel ou affine – équations linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants). La seule nouveauté est le théorème de Cauchy pour les équations scalaires d'ordre 2 à coefficients continus :  $y'' = ay' + by + c$  possède une unique solution à conditions initiales en  $y(t_0)$  et  $y'(t_0)$  imposées ( $a$ ,  $b$  et  $c$  sont continues sur un intervalle  $I$ ).
- Problèmes de recollement. Et on peut aussi redonner des systèmes différentiels linéaires, histoire de faire un peu de réduction.

## 2 Deuxième semaine : ÉDL et espaces vectoriels normés

Toutes les équations différentielles linéaires, avec en particulier les problèmes de raccord. Sur les espaces vectoriels normés, un objectif majeur est de savoir montrer qu'une partie est fermée/ouverte et/ou bornée.

- Normes, boules, convexes, ouverts et fermés.
- Convergence des suites. Caractérisation séquentielle des fermés. Limite d'une fonction en un point adhérent, continuité. Propriétés opératoires.
- En dimension finie : toutes les normes sont équivalentes ; la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des coordonnées ; la continuité d'une fonction est équivalente à la continuité de ses applications coordonnées ; une fonction continue définie sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes. les applications linéaires, bilinéaires, lipschitziennes sont continues.
- Les applications partielles d'une application continue sont continues, mais la réciproque est fausse.

## 3 Questions de cours

- (S1) Si  $u \in \mathcal{S}_E$  a ses valeurs propres positives, alors il existe  $v \in \mathcal{S}_E$  dont les valeurs propres sont positives et tel que  $v^2 = u$ .
- (S1) Si  $u$  est symétrique et possède pour valeurs propres  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  alors pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x)|x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$ .
- (S1+S2) Méthode de la variation de la constante pour prouver que si  $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$ , alors l'équation  $y' = ay + b$  possède au moins une solution.
- (S2) Toute boule ouverte est ouverte! (*Et la version fermée*)
- (S2)  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert dense de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## 4 Coming next

Prochaine et dernière quinzaine : espaces vectoriels normés, calcul différentiel dans  $\mathbb{R}^n$ .