1 Ivrogneries circulaires

1.1 De $\mathbb{Z}$ au cercle trigonométrique

1. Tout d'abord, $Y_1 = U_1$, donc :

$$\boxed{Y_1(\Omega) = \{-1, 1\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2.}$$

Ensuite (et il n'est peut-être pas utile d'en faire beaucoup plus...) :

$$\boxed{Y_2(\Omega) = \{-2, 0, 2\}, \text{ avec } \mathbb{P}(Y_2 = 2) = \mathbb{P}(Y_2 = -2) = 1/4 \text{ et } \mathbb{P}(Y_2 = 1) = 1/2.}$$

Bon, pour les grincheux : $\mathbb{P}(Y_2 = 2) = \mathbb{P}(U_1 = 1 \text{ et } U_2 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = 1)\mathbb{P}(U_2 = 1)$ *par indépendance...*

2. Déjà, $\mathbb{E}(U_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ puis $\mathrm{Var}(U_1) = \mathbb{E}(U_1^2) - \mathbb{E}(U_1)^2 = 1$. Ensuite, par **linéarité** de l'espérance, $\mathbb{E}(Y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(U_k) = 0$ et enfin par **indépendance** des U_k, $\mathrm{Var}(Y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(U_k) = n$.

$$\boxed{\mathbb{E}(U_1) = 0,\ \mathrm{Var}(U_1) = 1,\ \mathbb{E}(Y_n) = 0 \text{ et } \mathrm{Var}(Y_n) = n.}$$

Si on note que $V_n = \dfrac{1 + U_n}{2}$ *suit une loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(1/2)$ *alors* $\mathbb{E}(V_n) = 1/2 = (1 + \mathbb{E}(U_n))/2$*, ce qui donne* $\mathbb{E}(U_n)$*, et on peut obtenir de même* $\mathrm{Var}(U_n)$*.*

3. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On a $Y_n = -n + 2j$ si et seulement si j variables U_k valent 1 et les $n - j$ autres -1. Il y a $\binom{n}{j}$ façons de choisir celles qui valent 1 ; et une fois ce choix effectué, la probabilité pour que les différentes variables aient la valeur souhaitée est de $\dfrac{1}{2^n}$; ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Y_n = -n + 2j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Autre point de vue, fort élégant : puisque les $V_k = \dfrac{1 + U_k}{2}$ *sont indépendantes et suivent une loi* $\mathcal{B}(1/2)$*, leur somme* $\dfrac{n + Y_n}{2}$ *suit une loi binomiale* $\mathcal{B}(n, 1/2)$*, donc :*

$$\mathbb{P}(Y_n = -n + 2j) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n + n}{2} = j\right) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. À l'aide de la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{(-n+2j)i\alpha} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\mathrm{e}^{2i\alpha}\right)^j = \left(\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{2}\right)^n \left(1 + \mathrm{e}^{2i\alpha}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha} + \mathrm{e}^{i\alpha}}{2}\right)^n,$$

Soit finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = (\cos\alpha)^n}$$

1.2 Autre calcul de l'espérance de X_n

1. Tout d'abord :

$$X_{n+1} = \mathrm{e}^{i\alpha Y_{n+1}} = \mathrm{e}^{i\alpha(Y_n + U_{n+1})} = \mathrm{e}^{i\alpha Y_n} \mathrm{e}^{i\alpha U_{n+1}} = X_n \mathrm{e}^{i\alpha U_{n+1}},$$

et la loi de U_{n+1} étant connue, on a bien :

$$\boxed{X_{n+1} = \begin{cases} \mathrm{e}^{i\alpha} X_n & \text{avec probabilité } 1/2 \\ \mathrm{e}^{-i\alpha} X_n & \text{avec probabilité } 1/2 \end{cases}}$$

2. $X_{n+1} = \mathrm{e}^{ik\alpha}$ si et seulement si $(X_n = \mathrm{e}^{i(k-1)\alpha}$ et $U_{n+1} = 1)$ ou bien $(X_n = \mathrm{e}^{i(k+1)\alpha}$ et $U_{n+1} = -1)$. Ces événements sont incompatibles, et les événements $(X_n = \mathrm{e}^{i(k-1)\alpha})$ et $(U_{n+1} = 1)$ sont indépendants (coalitions : $X_n = U_1 + \cdots + U_n$), on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = \mathrm{e}^{ik\alpha}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(X_n = \mathrm{e}^{i(k-1)\alpha}\right) + \mathbb{P}\left(X_n = \mathrm{e}^{i(k+1)\alpha}\right)\right)}$$

3. En appliquant la définition de l'espérance (toutes les sommes sont en fait finies) puis en faisant les changements d'indices $k' = k-1$ et $k' = k+1$ dans les deux sommes, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\alpha}\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \mathrm{e}^{ik\alpha}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\alpha}\mathbb{P}\left(X_n = \mathrm{e}^{i(k-1)\alpha}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{ik\alpha}\mathbb{P}\left(X_n = \mathrm{e}^{i(k+1)\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i\alpha}\mathrm{e}^{ik'\alpha}\mathbb{P}\left(X_n = \mathrm{e}^{ik'\alpha}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-i\alpha}\mathrm{e}^{ik'\alpha}\mathbb{P}\left(X_n = \mathrm{e}^{ik'\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{-i\alpha}\right)\mathbb{E}(X_n) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) = (\cos\alpha)\mathbb{E}(X_n)}$$

Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{E}(X_0) = 1$, donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = (\cos\alpha)^n}$$

1.3 Répartition asymptotique sur le cercle trigonométrique

1. *Pour ceux étant passé à coté en première année, il s'agit de réapprendre les racines n-ièmes de l'unité...* On a bien entendu :

$$\boxed{\omega^N = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1}$$

Le cours de sup nous révèle que les complexes z vérifiant $z^N = 1$ sont ceux de la forme $\mathrm{e}^{2ik\pi/N}$, avec k décrivant $\mathbb{Z}$, ou encore k décrivant $[\![0, N-1]\!]$, ce dernier point de vue donnant une énumération injective :

$$\boxed{\mathbb{U}_N = \{\omega^k,\ k \in [\![0, N-1]\!]\} = \{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{N-1}\}}$$

Ce résultat est instantanément oublié ou retenu de travers s'il n'est pas d'une façon ou d'une autre associé à un dessin :

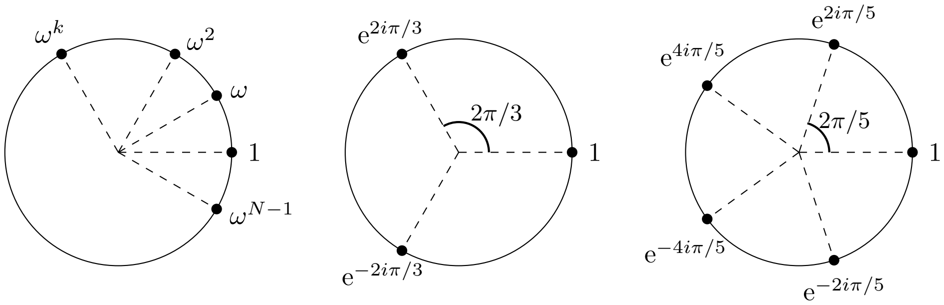

Figure 1 – $\mathbb{U}_N$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_5$

Pour la suite, on garde en tête des relations telles que $\omega^{N-1} = \omega^{-1} = \overline{\omega}$...

2. $X_n(\Omega)$ est constitué des ω^{-n+2k} avec $0 \leqslant k \leqslant n$, soit $2n+1$ points :

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{\omega, \overline{\omega}\},\ X_2(\Omega) = \{\omega^2, 1, \overline{\omega}^2\} \text{ et } X_3(\Omega) = \{\omega^3, \omega, \overline{\omega}, \overline{\omega}^3\}}$$

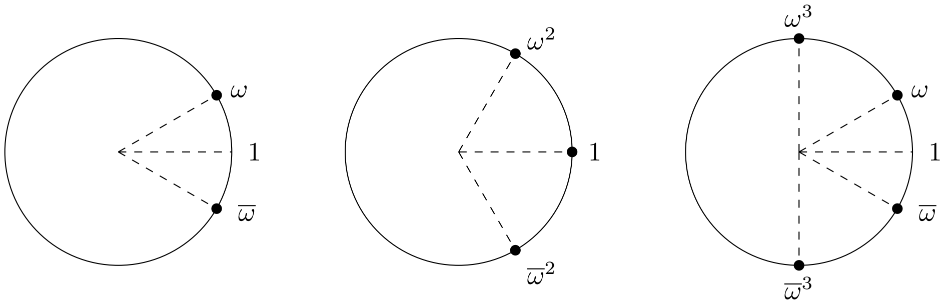

Figure 2 – $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ et $X_3(\Omega)$

Pour $N=5$, on a déjà :

$$X_4(\Omega)=\{1,\omega^2,\omega^4,\omega^{-2}=\omega^3,\omega^{-4}=\omega\}=\mathbb{U}_5$$

En fait, si $n\geqslant N-1$, $Y_n(\Omega)$ contient une suite de N entiers séparés par des distances de 2. Une fois placés sur le cercle trigonométrique, on obtient N complexes appartenant à $\mathbb{U}_N$ et différents (si $\omega^i=\omega^j$ alors $j-i$ est divisible par N, or N est impair, donc $j-i$ est divisible par $2N$, or les entiers concernés sont séparés au plus de $2(N-1)$...). On obtient bien ainsi tout $\mathbb{U}_N$.

$$\boxed{\text{Pour } n\geqslant N-1,\ X_n(\Omega)=\mathbb{U}_N.}$$

3. On a :
   - $\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=\omega)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=\omega^{N-1})$;
   - $\mathbb{P}(X_{n+1}=\omega^{N-1})=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=\omega^{N-2})$;
   - pour $1\leqslant k\leqslant N-2$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=\omega^k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=\omega^{k-1})+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=\omega^{k-1})$.

   ce qui se traduit matriciellement par :

$$\boxed{Z_{n+1}=AZ_n \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2 & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}}$$

4. Calmement, comme suggéré :
   - $V_0=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ et $JV_0=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=V_0$;
   - $V_1=\begin{pmatrix}1\\ \omega\\ \vdots\\ \omega^{N-1}\end{pmatrix}$ et $JV_0=\begin{pmatrix}\omega\\ \omega^2\\ \vdots\\ 1=\omega^N\end{pmatrix}=\omega V_1$;
   - plus généralement, pour $k\in[\![0,N-1]\!]$: $JV_k=\begin{pmatrix}\omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ 1=\omega^{Nk}\end{pmatrix}=\omega^k V_k$.

   Ainsi, $(V_0,...,V_{N-1})$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes**, donc cette famille est libre (c'est du cours !), donc (cardinal et dimension) constitue une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{(V_0,...,V_{N-1}) \text{ est une base de vecteurs propres de } J.}$$

5. On trouve cette fois, pour $k\in[\![0,N-1]\!]$:

$$J^{\mathrm{T}}V_k=\begin{pmatrix}\omega^{(N-1)k}=\omega^{-k}\\ 1\\ \omega^k\\ \vdots\\ \omega^{(N-2)k}\end{pmatrix}=\omega^{-k}\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(N-1)k}\end{pmatrix}$$

   ce qui fournit à nouveau un vecteur propre :

$$\boxed{J^{\mathrm{T}}V_k=\omega^{-k}V_k}$$

   Après avoir noté que $A=\frac{1}{2}\left(J^{\mathrm{T}}+J\right)$, on a donc :

$$\forall k\in[\![0,N-1]\!],\qquad AV_k=\frac{1}{2}\left(\omega^k+\omega^{-k}\right)V_k=\cos(2k\pi/N)V_k.$$

   La famille des V_k (qui est toujours une base de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$!) constitue donc une base de diagonalisation de A. Plus précisément :

$$\boxed{\text{En posant } P = \left(V_0 \vdots V_1 \vdots \cdots \vdots V_{N-1}\right) \text{ et } D = \mathrm{Diag}\left(1, \cos(2\pi/N), ..., \cos(2(N-1)\pi/N)\right) \text{ on a } P^{-1}AP = D.}$$

6. Puisque N est impair, les réels $\dfrac{2k\pi}{N}$ sont (pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$) dans $]0, 2\pi[$ et différents de π (sans quoi on aurait $N = 2k$ pair) donc ont leur cosinus dans $]-1, 1[$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ autres que 1 sont toutes de module strictement inférieur à 1.}}$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Diag}(1, 0, ..., 0), \text{ puis } A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathrm{Diag}(1, 0, ..., 0)P^{-1}.}$$

7. On a :

$$PV_0 = \begin{pmatrix} 1 + 1 + \cdots + 1 \\ 1 + \omega + \cdots + \omega^{N-1} \\ \vdots \\ 1 + \omega^{N-1} + \cdots + \left(\omega^{N-1}\right)^{N-1} \end{pmatrix}$$

Mais pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$, on a $\omega^k \neq 1$, et donc :

$$\sum_{j=0}^{N-1} (\omega^k)^j = \frac{1 - (\omega^k)^N}{1 - \omega} = \frac{1 - \omega^{kN}}{1 - \omega} = \frac{1 - (\omega^N)^k}{1 - \omega} = 0,$$

et ainsi :

$$\boxed{PV_0 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = NZ_0 \text{ puis } P^{-1}Z_0 = \frac{1}{N} V_0.}$$

8. Il s'agit de déterminer le comportement de Z_n lorsque n tend vers $+\infty$. Mais ce qui précède nous dit :

$$Z_n = A^n Z_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathrm{Diag}(1, 0, ..., 0)P^{-1}Z_0 = \frac{1}{N} P\mathrm{Diag}(1, 0, ..., 0)V_0 = \frac{1}{N} PZ_0 = \frac{1}{N} V_0 = \begin{pmatrix} 1/N \\ \vdots \\ 1/N \end{pmatrix}$$

ce qui est exactement le résultat souhaité :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, N-1]\!],\ \mathbb{P}(X_n = \omega^k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{N}.}$$

Avec le temps, la position initiale n'a plus d'importance : l'ivrogne a des probabilités de présence uniformément réparties sur $\mathbb{U}_N$.

1.4 Un peu de Python

1. Fastoche :

```
def marche(n):
    Y = 0
    for _ in range(n):
        if randint(0, 1) == 0:
            Y += 1
        else:
            Y -= 1
    return Y
```

Encore plus fastoche, si on a bien compris comment exprimer U_k à l'aide d'une Bernoulli :

```
def marche2(n): # héhé
    return 2*sum(randint(0, 1) for _ in range(n)) - n
```

2. Chaque calcul trigonométrique prend du temps, et fait perdre un petit peu de précision. On préférera donc travailler jusqu'au dernier moment dans $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{On retarde l'évaluation des cosinus et sinus.}}$$

3. Comme vu plus haut, on réalise une marche dans $\mathbb{Z}$ avant d'évaluer les cosinus et sinus :

```
from math import cos, sin, pi

def moyenne(n, alpha, nb_marches):
    x, y = 0, 0
    for _ in range(nb_marches):
        Y = marche(n)
        x += cos(alpha*Y)
        y += sin(alpha*Y)
    return complex(x/nb_marches, y/nb_marches)
```

4. Si tout se passe bien (en fait, la loi forte des grands nombres dit que ça va arriver avec probabilité 1) :

$$\boxed{\text{Les moyennes mesurées tendent vers l'espérance lorsque le nombre de marches tend vers l'infini.}}$$

```
>>> alpha0 = pi/10
>>> cos(alpha0)**10
0.6054290497131063
>>> moyenne(10, alpha0, 100)
(0.5768691769624721-0.007265425280053614j)
>>> moyenne(10, alpha0, 10**4)
(0.6028695834934474-0.0061778184731794685j)
>>> moyenne(10, alpha0, 10**6)
(0.6053022111202891-0.0009516615923409814j)
```

2 Autour de l'adjoint

1. (a) L'application $\varphi : x \mapsto \langle u(x)|y\rangle$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$; bref : une **forme linéaire**. Le **théorème de représentation** nous donne donc l'existence d'un unique $z \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$, ce qui est le résultat demandé.

$$\boxed{\text{Il existe un unique } z \in E \text{ tel que pour tout } x \in E,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|z\rangle.}$$

   (b) Soient $y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On fixe ensuite $x \in E$. On a :

$$\langle x|u^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle = \langle u(x)|\lambda y_1 + y_2\rangle = \lambda\langle u(x)|y_1\rangle + \langle u(x)|y_2\rangle = \lambda\langle x|u^*(y_1)\rangle + \langle x|u^*(y_2)\rangle,$$

   et donc :

$$\langle x|u^*(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda u^*(y_1) + u^*(y_2))\rangle = 0.$$

   Cette relation étant valable pour tout x, et en particulier pour $x = u^*(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda u^*(y_1) + u^*(y_2))$, on a bien $u^*(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)) = 0$.

$$\boxed{u^* \text{ est linéaire.}}$$

   (c) Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Prenons $x, y \in E$. On a alors d'une part

$$\langle(\lambda u_1 + u_2)(x)|y\rangle = \langle x|(\lambda u_1 + u_2)^*(y)\rangle$$

   et d'autre part :

$$\langle(\lambda u_1 + u_2)(x)|y\rangle = \lambda\langle u_1(x)|y\rangle + \langle u_2(x)|y\rangle = \lambda\langle x|u_1^*(y)\rangle + \langle x|u_2^*(y)\rangle = \langle x|\lambda u_1^*(y) + u_2^*(y)\rangle.$$

   Ceci étant valable pour tout x, on en déduit comme plus haut :

$$(\lambda u_1 + u_2)^*(y) = \lambda u_1^*(y) + u_2^*(y) = (\lambda u_1^* + u_2^*)(y).$$

   Et ceci étant valable pour tout y, on peut conclure :

$$\boxed{(\lambda u_1 + u_2)^* = \lambda u_1^* + u_2^*}$$

2. Le principe sera toujours le même : si on prouve la relation $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|v(y)\rangle$ pour tout $x, y \in E$, alors $\langle x|v(y)\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$, donc $\langle x|v(y) - u^*(y)\rangle = 0$, et comme ceci est valable pour tout x, $v(y) - u^*(y) = 0$, mais comme ceci est valable pour tout y, on a finalement $u^* = v$.
Dans la suite de cette question, la quantification (universelle) en x et y est implicite.

(a) Si $u : x \mapsto \lambda x$, alors

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle = \langle x|\lambda y\rangle = \langle x|(\lambda \mathrm{Id}_E)(x)\rangle,$$

et donc :

$$\boxed{(\lambda \mathrm{Id}_E)^* = \lambda \mathrm{Id}_E.}$$

(b) Soit u la projection orthogonale sur F. Décomposons x et y selon $F \oplus F^\perp$. On a alors :

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x_1|y_1 + y_2\rangle = \langle x_1|y_1\rangle = \langle x_1 + x_2|y_1\rangle = \langle x|u(y)\rangle,$$

et donc :

$$\boxed{(p_F^\perp)^* = p_F^\perp.}$$

(c) Soit u la symétrie orthogonale par rapport à F. Décomposons x et y selon $F \oplus F^\perp$. On a alors :

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x_1 - x_2|y_1 + y_2\rangle = \langle x_1|y_1\rangle - \langle x_2|y_2\rangle = \langle x_1 + x_2|y_1 - y_2\rangle = \langle x|u(y)\rangle,$$

et donc :

$$\boxed{(s_F^\perp)^* = s_F^\perp.}$$

(d) Supposons que u est un automorphisme orthogonal. On a alors u bijectif, avec :

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle u(x)|u\left(u^{-1}(y)\right)\rangle = \langle x|u^{-1}(y)\rangle$$

car u conserve le produit scalaire. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'adjoint d'un automorphisme orthogonal est sa bijection réciproque.}}$$

3. On suppose que $\mathcal{E}$ est une base de E.

(a) Le cours nous dit que si x et y ont pour coordonnées respectives $X, Y \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}$ et qu'on note φ le produit scalaire, alors :

$$\boxed{\langle x|y\rangle = X^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E})Y.}$$

(b) Soient $x, y \in E$, de coordonnées X et Y dans $\mathcal{F}$ orthonormée. Notons enfin $U = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F})$ et $V = \mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{F})$. Comme $\mathcal{F}$ est orthonormée, les produits scalaires se calculent simplement, et la relation $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$ se traduit $(UX)^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}(VY)$, soit encore

$$X^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}} - V)Y = 0.$$

Si on note $\Delta = U^{\mathrm{T}} - V$, on montre alors aisément que $\Delta = 0$, en appliquant la relation générale $X^{\mathrm{T}}\Delta Y = 0$ avec X et Y élémentaires correspondant aux coordonnées de f_i et f_j (des zéros partout sauf en i-ième (respectivement j-ième) ligne où on place un 1 : voir le cours), ce qui fournit $\Delta_{i,j} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{F} \text{ est orthonormée, alors } \mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{F}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{F})^{\mathrm{T}}.}$$

(c)
- Si on prend pour $\mathcal{E}$ n'importe quelle base orthonormée, on a $\mathrm{Mat}(\lambda \mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = \lambda I_n$, donc

$$\mathrm{Mat}\left((\lambda \mathrm{Id}_E)^*, \mathcal{E}\right) = \lambda I_n^{\mathrm{T}} = \lambda I_n,$$

donc $(\lambda \mathrm{Id}_E)^* = \lambda \mathrm{Id}_E$.
- En prenant pour $\mathcal{E}$ une base orthonormée adaptée à une projection orthogonale, la matrice de u dans cette base est diagonale, donc égale à sa transposée, donc $p^* = p$.
- C'est la même chose pour une symétrie orthogonale.
- Enfin, si u est orthogonal, on prend pour $\mathcal{E}$ une base orthonormée : on sait que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})$ est orthogonale, donc sa transposée est son inverse, et on retrouve ainsi le fait que $u^* = u^{-1}$.

$$\boxed{\text{Tout va bien.}}$$

4. (a) Notons $(f_1, ..., f_r)$ une base orthonormée de F. On sait (...) exprimer dans cette base le projeté de tout vecteur, en particulier les e_i : $u(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\langle e_i|f_j\rangle f_j$, et le théorème de Pythagore nous dit alors : $\left\|u(e_i)^2\right\| = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\langle e_i|f_j\rangle^2$. Il reste à sommer les n relations ainsi trouvées, intervertir des sommes... et constater qu'apparaissent à nouveau par Pythagorisation le carré des normes des f_j, c'est-à-dire 1 :

$$\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r}\langle e_i|f_j\rangle^2\right) = \sum_{j=1}^{r}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\langle e_i|f_j\rangle^2\right)}_{\|f_j\|^2=1} = r.$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = r}$$

(b) Notons $V = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$ avec $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ orthonormée. On se souvient peut-être (...) que les colonnes de V représentent les coordonnées des $v(e_i)$ dans $\mathcal{E}$; or la décomposition de chaque $v(e_j)$ dans $\mathcal{E}$ se calcule simplement du fait du caractère orthonormé de $\mathcal{E}$: $v(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle v(e_j) | e_i \rangle e_i$. Ainsi, $V_{i,j} = \langle v(e_j) | e_i \rangle$, et en faisant la somme des éléments diagonaux, on retrouve bien comme demandé :

$$\boxed{\mathrm{tr}(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i) | e_i \rangle.}$$

(c) Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\|w(e_i)\|^2 = \langle w(e_i) | w(e_i) \rangle = \langle w^* (w(e_i)) | e_i \rangle,$$

donc en faisant la somme et d'après la question précédente,

$$\sum_{i=1}^{n} \|w(e_i)\|^2 = \mathrm{tr}(w^* \circ w).$$

Le membre de droite ne dépend pas de $\mathcal{E}$: si on remplace $\mathcal{E}$ par une autre base orthonormée, le calcul reste valable, et donc :

$$\boxed{\text{La quantité } \sum_{i=1}^{n} \|w(e_i)\|^2 \text{ ne dépend pas de la base orthonormée } \mathcal{E}.}$$

(d) Reprenons pour u une projection orthogonale de rang r. Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$ ne dépend pas de $\mathcal{E}$ orthonormée, on peut la prendre adaptée au problème... il suffit donc de recoller des bases orthonormées de l'image et du noyau pour obtenir une base orthonormée de l'espace, dans laquelle on trouve immédiatement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|e_i\|^2 = r.}$$

(e) Supposons comme demandé que u est une projection sur un sous-espace de dimension r, et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = r$ pour une certaine base orthonormée $\mathcal{E}$. Cette relation est alors vraie pour tout base orthonormée, d'après ce qui précède. En prenant une base orthonormée de l'image concaténée avec une base orthonormée **non pas du noyau mais de l'orthogonal de l'image**, on obtient une base orthonormée $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ de l'espace pour laquelle les r premiers vecteurs sont envoyés sur eux-mêmes par u (et on ne sait rien des autres a priori). On a alors :

$$r = \sum_{i=1}^{n} \|u(f_i)\|^2 = r + \sum_{i=r+1}^{n} \|u(f_i)\|^2,$$

donc $u(f_i) = 0$ pour tout $i > r$, donc $(\mathrm{Im}\, u)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(u)$. Mais ces deux sous-espaces ont même dimension (dimension d'un orthogonal, et théorème du rang), donc sont égaux. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(u) = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$, et donc :

$$\boxed{u \text{ est une projection orthogonale.}}$$

3 Polynômes de Laguerre

1. (a) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. L'application $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$ donc est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi :

$$\boxed{t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $t > 0$, on a par intégration par parties :

$$\int_0^T t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}dt = \left[t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^T + (n+1)\int_0^T t^n\mathrm{e}^{-t}dt.$$

Quand T tend vers $+\infty$, chaque terme de cette relation possède une limite (nulle, pour le terme « tout intégré »), et donc :

$$I_{n+1}=\int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}dt=(n+1)\int_0^{+\infty} t^{n}\mathrm{e}^{-t}dt=(n+1)I_n.$$

Puisque

$$I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}dt=\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T}\mathrm{e}^{-t}dt=\lim_{T\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-T})=1,$$

on obtient par récurrence immédiate :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^{n}\mathrm{e}^{-t}dt=n!}$$

(c) Tout d'abord, l'intégrale intervenant dans la définition de $\langle P|Q\rangle$ est bien convergente. Le caractère symétrique est évident, et la bilinéarité est claire également (sur les copies peu remplies, il peut être raisonnable d'établir tout de même la linéarité à gauche, il me semble).
Si $P\in\mathbb{R}[X]$ et $T>0$, alors $t\mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est (continue) positive sur $[0,T]$, donc d'intégrale positive. En passant cette inégalité à la limite, on obtient bien $\langle P|P\rangle\geqslant 0$, d'où le caractère positif de $\langle\ |\ \rangle$.
Pour le caractère défini, supposons $P\neq 0$. On a alors $t\mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ continue, positive et non uniformément nulle (P s'annule au plus $\deg(P)$ fois) sur $[0,945]$, donc $\displaystyle\int_0^{945}P^2(t)\mathrm{e}^{-t}dt>0$. On a alors pour tout $T\geqslant 945$: $\displaystyle\int_0^{T}P^2(t)\mathrm{e}^{-t}dt\geqslant\int_0^{945}P^2(t)\mathrm{e}^{-t}dt$, et en passant cette inégalité à la limite :

$$\int_0^{+\infty}P^2(t)\mathrm{e}^{-t}dt\geqslant\int_0^{945}P^2(t)\mathrm{e}^{-t}dt>0,$$

prouvant ainsi le caractère défini de $\langle\ |\ \rangle$ (par la contraposée).

$$\boxed{\langle\ |\ \rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$$

Attention, si c'est une inégalité stricte qu'on passe à la limite, elle devient large à l'arrivée...

2. (a) Il suffit bien entendu d'appliquer le procédé d'**orthogonalisation** de Gram-Schmidt à la base canonique de $E=\mathbb{R}[X]$: on obtient alors une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est orthogonale, vérifie $\deg(P_k)=k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ donc est une base de E ; enfin, le procédé de Schmidt nous assure que P_n est unitaire, puisque par construction, $P_n=X^n-p(X^n)$, avec p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\boxed{\text{Il existe une base orthogonale de } E \text{ constituée de polynômes unitaires.}}$$

(b) Fixons $n\in\mathbb{N}$, et plaçons nous dans $F=\mathbb{R}_n[X]$. Si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux bases vérifiant les conditions imposées par la question précédente, alors P_n et Q_n sont l'un et l'autre dans F, mais chacun est orthogonal à une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X$ dans F est de dimension $(n+1)-n=1$: c'est une droite. Les deux polynômes P_n et Q_n sont donc colinéaires. Et puisqu'ils sont unitaires, ils sont égaux.

$$\boxed{\text{Dans la question précédente, il y a unicité de la base recherchée.}}$$

(c) On va bien entendu orthonormaliser la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Les calculs précédents nous assurent que $\langle X^i|X^j\rangle=(i+j)!$, ce qui va amener des calculs relativement simples. Nous noterons à chaque fois R_k le vecteur (non normalisé) obtenu par orthogonalisation, et P_k son normalisé.
Déjà, $R_0=1$ est de norme 1, donc $P_0=R_0=1$. Ensuite, $R_1=X-\langle X|1\rangle 1=X-1$ vérifie $\|R_1\|^2=\langle X-1|X\rangle=2-1=1$, donc $P_1=R_1=X-1$. On prend ensuite

$$R_2=X^2-\big(\langle X^2|1\rangle 1+\langle X^2|X-1\rangle(X-1)\big)=X^2-2-(6-2)(X-1)=X^2-4X+2,$$

qui vérifie $\|R_2\|^2=\langle X^2-4X+2|X^2\rangle=24-4\times 6+2\times 2=4$, donc $\|R_2\|=2$, puis

$$P_2=\frac{1}{2}\left(X^2-4X+2\right).$$

Enfin :

$$\begin{aligned}R_3&=X^3-\left(\underbrace{\langle X^3|1\rangle}_{6}1+\underbrace{\langle X^3|X-1\rangle}_{24-6=18}(X-1)+\frac{1}{4}\underbrace{\langle X^3|X^2-4X+2\rangle}_{120-96+12=36}(X^2-4X+2)\right)\\&=X^3-9X^2+18X-6\end{aligned}$$

Ce dernier vecteur vérifie

$$\|R_3\|^2 = \langle X^3 - 9X^2 + 18X - 6 | X^3\rangle = 6! - 9\times 5! + 18\times 4! - 6\times 3! = 36,$$

donc $P_3 = \dfrac{1}{6}R_3$. Pour résumer :

$$\boxed{P_0 = 1 \qquad P_1 = X - 1 \qquad P_2 = \frac{1}{2}\left(X^2 - 4X + 2\right) \qquad P_3 = \frac{1}{6}\left(X^3 - 9X^2 + 18X - 6\right).}$$

3. *Deux bornes inférieures.*

(a) On a $\varphi(a,b) = \left\|X^3 - \left(aX^2 + bX + c\right)\right\|^2$, donc il ne semble pas déraisonnable de voir cela comme un problème de distance à un sous-espace, vous ne pensez pas ? COPY/PASTE donc.

Notons S le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$: dans la Gram-Schmidtisation, on a en fait déjà calculé $S = 9X^2 - 18X + 6$, mais aussi $X^3 - S = R_3$, et la norme de ce dernier : 6...

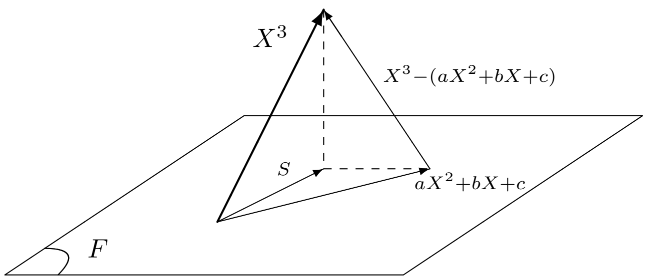

Figure 3 – Interprétation géométrique du problème

Par définition du projeté orthogonal, on a $(X^3 - S) \perp F$, donc la décomposition de $X^3 - (aX^2 + bX + c)$ suggérée par le dessin précédent va être avantageusement Pythagorisée :

$$\begin{aligned}\varphi(a,b,c) = \left\|X^3 - (aX^2+bX+c)\right\|^2 &= \left\|\left(X^3 - S\right) + \left(S - (aX^2+bX+c)\right)\right\|^2 \\ &= \left\|X^3 - S\right\|^2 + \left\|S - (aX^2+bX+c)\right\|^2 \\ &\geqslant \left\|X^3 - S\right\|^2 = \|R_3\| = \varphi\left(9,-18,6\right)\cdot\end{aligned}$$

Ainsi, les $\varphi(a,b,c)$ sont tous minorés par $\varphi(9,-18,6)$, donc cette dernière valeur est le **minimum** des $\varphi(a,b,c)$.

$$\boxed{\mathrm{Inf}\{\varphi(a,b,c)\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\} = \varphi(9,-18,6) = \|R_3\|^2 = 36.}$$

(b) Cette fois, $\psi(a,b,c) = \langle X^3 - (aX^2 + bX + c)|1\rangle$. Mais $\psi(0,0,c) = \langle X^3|1\rangle - c\langle 1|1\rangle = 6 - c$, donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des } \psi(a,b,c) \text{ n'est pas minoré.}}$$

Selon la définition que votre professeur de première année vous aura donné, on dira que cet ensemble n'a pas de borne inférieure... ou bien que sa borne inférieure est $-\infty$. Les deux points de vue existent et ont leur intérêt (et leurs inconvénients !)

4. (a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Un point de vue consiste à appliquer directement Leibniz : la dérivée i-ième de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est $(-1)^i\mathrm{e}^{-t}$ et celle de $t \mapsto t^n$ est $t \mapsto \dfrac{n!}{(n-i)!}t^{n-i}$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Q_n(t) = (-1)^n\mathrm{e}^t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}(-1)^{n-k}\mathrm{e}^{-t} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k t^{n-k},$$

et Q_n est bien polynomiale.

Un autre point de vue consiste, toujours à n fixé, à prouver par récurrence (quasi immédiate) que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la dérivée k-ième de $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est de la forme $t \mapsto R_k(t)\mathrm{e}^{-t}$ avec R_k polynomiale. Pour $k = n$, on a le résultat souhaité puisque $Q_n(t) = (-1)^n R_n(t)$.

$$\boxed{Q_n \text{ est une application polynomiale.}}$$

(b) Une grande maîtrise de la dérivation des produits, mais aussi des exponentielles, nous donnera normalement sans trop de problèmes :

$$\boxed{Q_0 = 1, \qquad Q_1 = X - 1, \qquad Q_2 = X^2 - 4X + 2, \qquad Q_3 = X^3 - 9X^2 + 18X - 6.}$$

Gruml, ça rappelle vaguement un truc, non ?

Ce qui précède peut raisonnablement nous laisser penser que Q_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 1.

Si on a prouvé le caractère polynomial de Q_n avec le premier point de vue, ce résultat découle directement de la formule trouvée pour Q_n. Avec le second point de vue il faut se battre un peu plus, mais à peine : dans la récurrence, on prouverait sans problème que R_k a pour terme dominant $(-1)^k X^n$, donc $Q_n = (-1)^n R_n$ a bien pour terme dominant X^n.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n \text{ a pour terme dominant } X^n.}$$

(c) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on va montrer qu'il est orthogonal à tous les X^k, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Fixons donc un tel k. Il convient de calculer $\langle Q_n | X^k \rangle$, c'est-à-dire la limite de $(-1)^n \displaystyle\int_0^T t^k \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n)} dt$ lorsque T tend vers $+\infty$. Notons dès maintenant que toutes les dérivées $(t^n \mathrm{e}^{-t})^{(i)}$ sont de la forme $S_i(t)\mathrm{e}^{-t}$ avec S_i polynomiale, donc les fonctions en jeu sont toutes intégrables sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, $S_i(t)$ contient des monômes de degré compris entre $n-i$ et n (dériver trois fois $t \mapsto t^5 \mathrm{e}^{-t}$, si on n'est pas convaincu par l'affirmation précédente). En particulier, pour $i < n$, $S_i(0) = 0$.

On réalise une intégration par parties (calmement !), qui nous donne :

$$(-1)^n \int_0^T t^k \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n)} dt = (-1)^n T^k \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-1)} (T) - (-1)^n k \int_0^T t^{k-1} \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-1)} dt.$$

On peut maintenant faire tendre T tend vers $+\infty$ (on a déjà justifié le caractère convergent des intégrales), ce qui nous donne :

$$\langle Q_n | X^k \rangle = (-1)^{n+1} k \int_0^{+\infty} t^{k-1} \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-1)} dt,$$

et parions que $k-1$ intégrations par parties plus tard, on arrive à :

$$\langle Q_n | X^k \rangle = (-1)^{n+k} k! \int_0^{+\infty} \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-k)} dt.$$

Cette dernière intégrale est la limite lorsque T tend vers $+\infty$ de

$$\psi(T) = \int_0^T \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-k)} dt = \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-k-1)} (T) - \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-k-1)} (0),$$

c'est-à-dire 0 (toujours grâce à l'exponentielle, le au fait que $\left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(n-k-1)}$ ne contient que des monômes de degré au moins $k+1 > 0$). Ainsi, $Q_n \perp X^k$, et comme ceci est valable pour tout $k < n$:

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

(d) On a vu que Q_n est de terme dominant X^n, donc s'écrit $Q_n = X^n + U_n$, avec U_n de degré strictement plus petit que n, donc U_n est orthogonal à Q_n, et ainsi :

$$\|Q_n\|^2 = \langle Q_n | Q_n \rangle = \langle Q_n | X^n + U_n \rangle = \langle Q_n | X^n \rangle,$$

et on peut recycler le calcul précédent réalisé pour $\langle Q_n | X^k \rangle$:

$$\langle Q_n | X^n \rangle = (-1)^{n+n} n! \int_0^{+\infty} \left(t^n \mathrm{e}^{-t}\right)^{(0)} dt = n! \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt = (n!)^2,$$

et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \|Q_n\| = n!}$$

(e) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Comme vu plus haut, les polynômes Q_n et P_n appartiennent l'un et l'autre à $E = \mathbb{R}_n[X]$, tout en étant orthogonaux au sous-espace $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ils appartiennent donc à $F^\perp$, qui est de dimension $n+1-n = 1$: $F^\perp$ est une droite, donc P_n et Q_n sont proportionnels.

Les normes de P_n et Q_n sont respectivement 1 et $n!$, ce qui nous donne $Q_n = \pm n! P_n$. Il reste à voir que par construction (procédé d'orthonormalisation), P_n est de coefficient dominant strictement positif, et il en va de même pour Q_n (son coefficient dominant vaut 1). Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n = n! P_n.}$$

(f) On montre de façon classique que ce type de polynôme orthogonaux a le bon nombre de racines où il faut. Et la technique est toujours la même !
Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que P_n possède strictement moins que n racines dans $]0, +\infty[$.
On va arriver à une contradiction en considérant $\langle P_n|Q\rangle$, avec Q de la forme $(X - x_1)...(X - x_k)$, où les x_i sont des racines de P_n. Le produit scalaire $\langle P_n|Q\rangle$ est nul, si $k < n$ (puisqu'alors $P_n \perp \mathbb{R}_k[X]$) ; mais c'est l'intégrale d'une fonction continue non nulle... dont on va s'arranger pour qu'elle soit positive.

Puisque P_n change de signe en ses racines de multiplicités impaires de $]0, +\infty[$, on ne va considérer que celles-ci : elles sont strictement moins que n. Notons-les $x_1, ..., x_k$ et définissons

$$Q = (X - x_1)...(X - x_k).$$

On a alors d'une part $\langle P_n|Q\rangle = 0$ car $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \perp P_n$ et d'autre part, l'application $t \mapsto P_n(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue, non nulle, et de signe constant, donc est d'intégrale non nulle, ce qui constitue une absurdité.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes dans }]0, +\infty[.}$$

On a montré que P_n possède au moins *n racines dans $]0, +\infty[$, mais le degré de P_n nous dit que c'est* exactement *n racines.*

(g) Terminons par une preuve utilisant la forme de Q_n (dérivée n-ième d'un bidule). On commence par rappeler deux résultats classiques :

Proposition 1 — Lemme de Rolle

Si f est de continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors f' s'annule sur $]a, b[$.

Proposition 2 — Lemme de Rolle généralisé

Si f est de continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$, avec $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$, alors f' s'annule sur $]a, +\infty[$.

Les preuves de ces résultats sont dans le cours de première année.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $f : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$. Le théorème de Rolle généralisé nous assure que f' possède une racine $x_{1,1}$ dans $]0, +\infty[$. Mais attention, f' s'annule encore en zéro, donc on peut appliquer Rolle entre 0 et $x_{1,1}$ puis entre $x_{1,1}$ et $+\infty$, ce qui donne deux racines $x_{2,1}$ et $x_{2,2}$ pour f'' avec $0 < x_{2,1} < x_{2,2}$. On prouverait sur le même principe et par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f^{(k)}$ possède n racines $0 < x_{k,1} < x_{k,2} < \cdots < x_{k,k}$, ce qui donne le résultat souhaité pour $k = n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ Q_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes dans }]0, +\infty[.}$$