Espaces vectoriels normés

1 Topologie

1.1 Des normes

Exercice 1 – *Centrale 2010 [6/10]*
Dans un espace vectoriel normé, caractériser l'inclusion $B(x_0, r) \subset B(x'_0, r')$ à l'aide de x_0, x'_0, r et r'.

Exercice 2 – *Mines 2009 [6/10]*
On note E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Pour $f \in E$, on définit $N(f) = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme.
2. La comparer à $\| \ \|_\infty$.

Exercice 3 – *Mot-clé : « densité » [8/10]*
Soit u une suite à valeurs dans $[0,1]$. On définit sur $E = \mathcal{C}([0,1])$:

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(u_n)|}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que N soit une norme.
2. Lorsque cette condition est vérifiée, comparer $\| \ \|_\infty$ et N.

Exercice 4 – *Sur les fonctions lipschitziennes [6/10]*
E est ici l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ lipschitziennes. On définit sur E :

$$N(f) = \|f\|_\infty + \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \text{ et } N_a(f) = |f(a)| + \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$$

1. Vérifier que N et N_a sont des normes sur E.
2. Sont-elles équivalentes ?
3. N est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

Exercice 5 – *Hum... histoire de normes équivalentes ? [6/10]*
Soient $x_0, ..., x_n$ $n+1$ réels distincts. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \sum_{i=0}^{n} |P(x_i)| \geqslant \alpha \operatorname*{Sup}_{[0,1]} |P|.$$

Exercice 6 – *Les yeux fermés [4/10]*
Montrer que les parties de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y \geqslant 3z\right\} \quad \text{et} \quad \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 < y^2 + z^2\right\}$$

sont respectivement fermées et ouvertes.

1.2 Ouverts et fermés ; intérieur et adhérence

Exercice 7 – *Intérieur d'un sous-espace [6/10]*
Soit F un sous-espace strict de E. Montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 8 – *Adhérence et intérieur d'un convexe [7/10]*
Soient E un espace vectoriel normé réel et C une partie convexe de E.
Montrer que l'adhérence puis (plus dificile) que l'intérieur de C sont convexes.

Exercice 9 – *Dans* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *[6/10]*
Calculer l'adhérence et l'intérieur dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ de :

1. l'ensemble des $f \in E$ nulles en 0 et en 1 ;
2. l'ensemble des fonctions strictement positives ;
3. l'ensemble des fonctions strictement croissantes.

Exercice 10 – *Ouvert + fermé [5/10]*
Soient Ω et F deux parties respectivement ouverte et fermée d'un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\Omega + F = \{a + b \,|\, a \in \Omega \text{ et } b \in F\}$$

est un ouvert.

2 Topologie des matrices

Exercice 11 – *Projecteurs et symétries [3/10]*
Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de projection (respectivement symétrie) constitue une partie fermée.

Exercice 12 – *Diagonalisables denses [5/10]*
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13 – $GL_n(\mathbb{R})$ *ouvert dense [5/10]*
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 – $O_n(\mathbb{R})$ *compact [4/10]*
Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.

Exercice 15 – *Mines [8/10]*
Soit $M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, $\mathrm{Sp}(M) = \{a\}$. Montrer l'équivalence entre :

1. $|a| < 1$;
2. $M^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;
3. $\sum_p M^p$ converge (au sens : $\left(\sum_{i=1}^{p} M^i\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge).

Exercice 16 – *L'adhérence passe-t-elle par* 0 *? [8/10]*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. La matrice nulle est-elle dans l'adhérence de la classe de similitude de $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$?

Exercice 17 – *Une frontière [7/10]*
Déterminer, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la frontière de $SL_n(\mathbb{R})$ (les matrices de déterminant 1).

3 Continuité

Exercice 18 – *Distance à un ensemble [7/10]*
Pour une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et $x \in E$, on définit : $d_A(x) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne (donc continue !).
2. Expliciter un exemple pour lequel $d_A(x) = 0$ avec $x \notin A$.
3. Supposons A fermée. Montrer : $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
4. On suppose que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$. Montrer que A est fermée.

Exercice 19 – *Des applications linéaires continues ; exercice limite-limite... [9/10]*
$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de $\| \ \|_\infty$.

1. Soit φ définie par :
$$\forall f \in E, \qquad \varphi(f) = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f.$$
Montrer que φ est continue ; calculer sa norme (au sens hors-programme : la borne supérieure des $\|\varphi(f)\|$, pour f de norme 1), et montrer qu'elle n'est pas atteinte.
2. Même question avec ψ définie par : $\psi(f) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{2^n} f(1/n)$.

Exercice 20 – *Dans $\mathbb{R}^2$ [7/10]*
Étudier la continuité des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \operatorname{Max}(x, y)$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f_3 : (x, y) \mapsto \sqrt{|x| + |y|}$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Exercice 21 – *Sur le simplexe [6/10]*
Montrer que lorsque (x, y, z) décrit l'ensemble des triplets de réels positifs et de somme égale à 1, le produit xy^2z^3 possède un maximum.

Exercice 22 – *Sous le graphe [5/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23 – *Une surface [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d \text{ et } z = f(x, y)\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$ d'intérieur vide.

4 Des indications

Exercice 1 – J'imagine qu'on attend (après avoir fait un dessin) : $\|x_0 - x_0'\| + r \leqslant r'$...

Exercice 2 – Déjà, $t \mapsto \sin(n\pi t)$ interdit l'un des deux contrôles. L'autre est assuré par l'inégalité de Taylor-Lagrange (obtenue après la formule de Taylor avec reste intégral... on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis sur f' en partant d'un point où f' s'annule via Rolle...) entre 0 et le point de $[0, 1/2]$ où $\|f\|_\infty$ est atteinte), fournissant $\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{8} N(f)$, atteint pour $x(1 - x)$.

Exercice 3 – C'est une norme si et seulement si $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. Lorsque c'est le cas, on a $N(f) \leqslant 2\,\|f\|_\infty$, avec aucune inégalité dans l'autre sens : si $\varepsilon > 0$, on peut construire f telle que $N(f) \leqslant \varepsilon$ et $\|f\|_\infty = 1$ (prendre un pic évitant les premiers u_n...).

Exercice 4 – $N_a \leqslant N \leqslant 2N_a$ et $\|\ \|_\infty \leqslant N$, mais (« pics ») pas de contrôle du type $N \leqslant K\,\|\ \|_\infty$.

Exercice 5 – N'y aurait-il pas deux normes sur un même espace de dimension finie ?

Exercice 6 – Je ferais bien intervenir deux fonctions f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ dont je prétendrais qu'elles sont continues « d'après les théorèmes usuels », avant de considérer $f^{-1}([0,+\infty[)$ et $g^{-1}(]-\infty,0[)$.

Exercice 7 – Si F était d'intérieur non vide, on trouverait par translation une boule centrée en 0 incluse dans F, puis $E \subset F$ par dilatation.

Exercice 8 – Si $a, b \in \overline{C}$ et $\lambda \in [0,1]$, il existe $(a_n), (b_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. On a alors $\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in C$ et $\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda a + (1-\lambda)b$. Pour l'intérieur, si $B(a,\rho_1) \subset C$, $B(b,\rho_2) \subset C$ et $c = \lambda a + (1-\lambda)b$, alors en prenant $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$, on a ce qu'on peut espérer.

Exercice 9 – Notant X_1, X_2 et X_3 les trois ensembles considérés, on a $\overline{X_1} = X_1$, $\overset{\circ}{X}_1 = \emptyset$, $\overline{X_2}$ est l'ensemble des fonctions à valeurs positives (au sens large), $\overset{\circ}{X}_2 = X_2$, $\overline{X_3}$ est l'ensemble des fonctions croissantes (pour l'inclusion non triviale, considérer $f_n = f + \dfrac{1}{n}\mathrm{Id}$), et enfin $\overset{\circ}{X}_3 = \emptyset$.

Exercice 10 – On fixe $(a_0, b_0) \in \Omega \times F$. Il existe $\rho > 0$ tel que $B(a_0,\rho) \subset \Omega$, et on a alors $B(a_0+b_0, \rho/2) \subset \Omega + F$ (et on se fiche du caractère fermé de F ; c'était un piège !).

Exercice 11 – L'application $M \mapsto M^2$ est continue...

Exercice 12 – Trigonaliser et ajouter des petits trucs sur la diagonale...

Exercice 13 – Ouvert $(\det^{(-1)}(\mathbb{R}^*))$, dense car $A - \frac{1}{p}I_n \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $\frac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(A)$ ÀPCR.

Exercice 14 – Borné pour $\|\ \|_\infty$ par exemple ; et continuité de $M \mapsto {}^tMM$.

Exercice 15 – $M = aI + N$; binôme...

Exercice 16 – Déjà, il est nécessaire d'avoir $\alpha = \beta = 0$ (le déterminant de $P_n^{-1}AP_n - \alpha I_3$ est toujours nul et converge vers $-\alpha^3$...) Si cette condition est vérifiée, on montre sans mal que la matrice donnée dans l'énoncé est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 17 – Déjà, $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé. Ensuite, toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est limite de matrices qui ne sont PAS dans $SL_n(\mathbb{R})$ (ajouter $\frac{1}{p}I_n$...) donc est dans l'adhérence du complémentaire. Finalement, $SL_n(\mathbb{R})$ est sa propre adhérence !

Exercice 18 – Il faut montrer : $d_F(x) - d_F(y) \leqslant \|x-y\|$ et $d_F(y) - d_F(x) \leqslant \|x-y\|$... Pour la première, je lancerais bien un coup d'inégalité triangulaire entre x, y, et $z \in F$ qu'on fixe provisoirement.

Exercice 19 – $|\!|\!|\varphi|\!|\!| = |\!|\!|\psi|\!|\!| = 1$.

Exercice 20 – $f_1(x,y) = \dfrac{|x-y| + x + y}{2}$; $f_2(x,x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq f_2(0,0)$. Sommes, produits, projections et compositions pour f_3 et f_4.

Exercice 21 – Keywords : continue, fermée, bornée.

Exercice 22 – Caractérisation séquentielle de la fermeture.

Exercice 23 – Caractérisation séquentielle de la fermeture.