CCP PSI 2
un corrigé.

1 Etude d'un endomorphisme

I.1.1 Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et distributivité de la multiplication sur l'addition. On remarque que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$
Ainsi, $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) = \text{Vect}(\Phi(1), \dots, \Phi(X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$ (chaque $\Phi(X^k)$ étant dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour $k \le n$). $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable par Φ_n.

I.1.2 L'application $\langle .,. \rangle$ est symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2\ dt \ge 0$. Si cette quantité est nulle alors P^2 est nul sur $[-1,1]$ (positif, continu, d'intégrale nulle) et donc $P = 0$ (polynôme avec une infinité de racines). On a donc bien un produit scalaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$;
$$\langle XP, Q\rangle = \int_{-1}^1 tP(t)Q(t)\ dt = \langle P, XQ\rangle$$

I.2.1 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$; comme $B = A'$, on a
$$\langle \Phi(P), Q\rangle - \langle P, \Phi(Q)\rangle = \int_{-1}^1 \big((P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'\big)$$
On remarque que $(P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'$ est la dérivée de $(P'Q - PQ')A$ et on a donc
$$\langle \Phi(P), Q\rangle - \langle P, \Phi(Q)\rangle = \big[(P'Q - PQ')A\big]_{-1}^1 = 0$$
On a montré que
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle \Phi_n(P), Q\rangle = \langle P, \Phi_n(Q)\rangle$$
ce qui signifie que Φ_n est auto-adjoint.

I.2.2 Les calculs de **I.1.1** montre que la matrice de Φ_n dans la base canonique est
$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$
C'est une matrice triangulaire et ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. On a ainsi
$$\text{Sp}(\Phi(n)) = \{k(k+1)/\ 0 \le k \le n\}$$

I.2.3 Les valeurs propres de Φ_n sont deux à deux distinctes ($x \mapsto x(x+1)$ est injective sur $\mathbb{R}^+$) et en nombre $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, ils sont donc forcément tous de dimension 1.
Φ_{k+1} possède une valeur propre de plus que Φ_k. Il y a donc un vecteur propre de Φ_{k+1} qui n'est pas vecteur propre de Φ_k. C'est un polynôme de degré $\le k+1$ qui n'est pas de degré $\le k$ et qui est donc de degré $k+1$. Ceci montre que Φ_n possède un vecteur propre de degré $1, 2, \dots, n$. Il y en a aussi un de degré 0 (le polynôme constant qui est associé à la valeur propre 0).
Un multiple d'un vecteur propre étant encore propre, on peut se ramener au cas d'un polynôme

unitaire. Il existe finalement une base de vecteurs propres pour Φ_n échelonnée en degré et formée de polynômes unitaires.
Avec la remarque initiale, on peut même affirmer que

$$\ker(\Phi_n - k(k+1)Id) = \mathrm{Vect}(P_k)$$

I.2.4 Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique étant orthogonaux, les P_k forment ainsi une famille orthogonale (et donc une base orthogonale de vecteurs propres) et on a

$$\forall i \neq k,\ \langle P_i, P_k \rangle = 0$$

En particulier P_k est dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$. Cette famille est constitué de k polynômes indépendants (orthogonaux et non nuls) de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Elle engendre ainsi un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}_k[X]$ qui, par dimension, est égal à $\mathbb{R}_k[X]$:

$$\forall k,\ P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$$

I.2.5 On détermine avec la calculatrice les vecteurs propres de $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ et on en déduit (après normalisation) que

$$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = X^2 - \frac{1}{3} = (X - \frac{1}{\sqrt{3}})(X + \frac{1}{\sqrt{3}}),\ P_3 = X(X^2 - \frac{3}{5}) = X(X - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})(X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$$

2 Etude des racines de ces polynômes

II.1 P_n et XP_{n-1} étant unitaires de degré n, $P_n - XP_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons λ_n l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans ce polynôme. On a alors $P_n - XP_{n-1}$ et $-\lambda_n P_{n-1}$ qui sont de degré $\leq n-1$ et ont des coefficients identiques devant X^{n-1}. Leur différence $P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1}$ est donc de degré $\leq n-2$ et

$$P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

II.2 Soit $k \leq n-3$. $\langle XP_{n-1}, P_k \rangle = \langle P_{n-1}, XP_k \rangle = 0$ car $XP_k \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et est donc orthogonal à P_{n-1}. On a ainsi (on sait aussi que P_{n-1} et P_k sont orthogonaux)

$$\langle S_n, P_k \rangle = \langle P_n, P_k \rangle - \langle XP_{n-1}, P_k \rangle + \lambda_n \langle P_{n-1}, P_k \rangle = \langle P_n, P_k \rangle$$

II.3 S_n et P_{n-2} sont tous deux deux dans $\mathbb{R}_{n-2}[X] \cap \mathbb{R}_{n-3}[X]^{\perp}$ et cet espace est de dimension 1 (l'orthogonal d'un espace de dimension $n-2$ dans un espace de dimension $n-1$ est de dimension 1). Ces deux polynômes sont donc colinéaires et comme $P_{n-2} \neq 0$, il existe μ_{n-2} tel que $S_{n-2} - \mu_{n-2} P_{n-2}$. On a alors

$$P_n = (X - \lambda_n) P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

Prenons le produit scalaire de cette expression avec P_{n-2}. On obtient

$$\mu_n \|P_{n-2}\|^2 = \langle XP_{n-1}, P_{n-2} \rangle = \langle P_{n-1}, XP_{n-2} \rangle$$

$XP_{n-2} - P_{n-1}$ est de degré $\leq n-2$ et donc orthogonal à P_{n-1}. On a donc aussi

$$\mu_n \|P_{n-2}\|^2 = \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle > 0$$

et comme $\|P_{n-2}\|^2 > 0$, on conclut que
$$\mu_n > 0$$
Avec les résultats de **I.2.5** on a
$$P_2 = XP_1 - \frac{1}{3} \text{ et } P_3 = XP_2 - \frac{4}{15}P_1$$
et ainsi
$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \mu_2 = \frac{1}{3},\ \mu_3 = \frac{4}{15}$$

II.4 Si $k \geq 1$ alors P_k est orthogonal à $P_0 = 1$ et donc
$$\int_{-1}^{1} P_k(t)\, dt = \langle P_k, P_0 \rangle = 0$$
Si, par l'absurde, P_k n'admettait que des racines d'ordre impair dans $]-1,1[$, il serait de signe constant sur $]-1,1[$ (les racines avec changement de signe sont celles d'ordre impair) et donc aussi (continuité) sur $[-1,1]$. Etant continu et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, il serait nul sur $[-1,1]$ et donc nul (polynôme avec une infinité de racines). C'est impossible et P_k a donc au moins une racine d'ordre impair dans $]-1,1[$.

II.5 Supposons, par l'absurde $k < n$. On a alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est orthogonal à P_n et donc $\int_{-1}^{1} PQ_n = 0$. Or, par définition de Q_n, PQ_n n'a que des racines d'ordre pair dans $]-1,1[$ et est donc de signe constant sur $[-1,1]$. On aboutit à une contradiction comme en question précédente.
On a donc au moins n racines d'ordre impair dans $]-1,1[$ pour P_n. Mais P_n admettant au plus n racines comptées avec leurs multiplicités, les ordres valent nécessairement 1 et il n'y a pas d'autres racines. Finalement, P_n est scindé à racines simples et ses racines sont toutes dans $]-1,1[$.

3 Etude d'une matrice

III.1.1 On a directement
$$Q_1(X) = X \text{ et } Q_2(X) = X(X-\lambda_2) - \mu_2 = (X-\lambda_2)Q_1(X) - \mu_2 Q_0(X)$$
Pour calculer $Q_3(X)$, on développe par rapport à la dernière colonne :
$$Q_3(X) = (X-\lambda_3)Q_2(X) + \sqrt{\mu_3}(-\sqrt{\mu_3}X) = (X-\lambda_3)Q_2(X) - \mu_3 Q_1(X)$$

III.1.2 On procède de même en développant par rapport à la dernière colonne dans $Q_n(X)$:
$$Q_n(X) = (X-\lambda_n)Q_{n-1}(X) + \sqrt{\mu_n}\Delta_{n-1}(X)$$
où $\Delta_{n-1}(X)$ est un déterminant de taille $n-1$ que l'on développe par rapport à sa dernière ligne pour obtenir
$$Q_n(X) = (X-\lambda_n)Q_{n-1}(X) - \mu_n Q_{n-2}(X)$$

III.1.3 On a $Q_O = P_0$, $P_1 = Q_1$ et (P_k) et (Q_k) qui vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2. Une récurrence donne alors
$$\forall k \in \mathbb{N},\ Q_k(X) = P_k(X)$$
Or, M_n est symétrique réelle et donc diagonalisable. Son polynôme caractéristique $(-1)^n Q_n(X)$ est alors scindé sur $\mathbb{R}$. $Q_n = P_n$ est donc scindé sur $\mathbb{R}$ (toutes ses racines sont réelles).

III.2.1 Soit $x \in F_i$. On peut l'écrire $x = \sum_{k=1}^{i} x_k e_k$ et on a (la famille des e_k étant orthonormée)

$$(u(x)|x) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k x_k^2 \leq \alpha_i \sum_{k=1}^{i} x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_i$ par exemple. On a ainsi

$$\max_{x \in F_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$$

III.2.2 Soit $x \in G_i$. On peut l'écrire $x = \sum_{k=i}^{n} x_k e_k$ et on a (la famille des e_k étant orthonormée)

$$(u(x)|x) = \sum_{k=i}^{n} \alpha_k x_k^2 \geq \alpha_i \sum_{k=i}^{n} x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_i$ par exemple. On a ainsi

$$\min_{x \in G_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$$

III.3 Soit F de dimension i. Par formule de Grassman,

$$\dim(F \cap G_i) = \dim(F) + \dim(G_i) - \dim(F + G_i) = n + 1 - \dim(F + G_i) \geq 1$$

et $F \cap G_i \neq \{0\}$. D'après la question précédente $(u(x)|x) \geq \alpha_i$ pour x unitaire dans G et donc a fortiori dans $G \cap F_i$. Comme il existe un tel x (puisque $F \cap G_i$ contient une droite) on a

$$\max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \geq \alpha_i$$

et comme ceci est vrai pour tout sous-espace F de dimension i (la borne inférieure est le plus grand des minorants et α_i est un minorant)

$$\alpha_i \leq \inf_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

Pour $F = F_i$, on a vu que le minorant trouvé est atteint. C'est donc en fait la borne inférieure et, mieux, le minimum :

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

III.4.1 On note u_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^k$ canoniquement associé à u_k. Si $y \in \mathbb{R}^k$, on note Y la matrice colonne associée (coordonnées dans la base canonique).
Soit F' un sous-espace de $\mathbb{R}^{n-1}$ de dimension $n-i$. On note $F = \{x = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, 0) / (x'_1, \dots, x'_{n-1}) \in F'\}$. F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ isomorphe à F' et donc de dimension $n-i$. Si $x' \in F'$, on note $x \in F$ l'élément associé. Un calcul par blocs montre que

$$\forall x' \in F',\ (u_{k-1}(x')|x') = {}^t X' M_{n-1} X' = {}^t X M_n X = (u_n(x)|x)$$

et donc ($\|x\| = 1$ ssi $\|x'\| = 1$)

$$\min_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') = \min_{x \in F, \|x\|=1} (u_{k-1}(x)|x)$$

Avec le résultat admis, le membre de droite est inférieur à α_{i+1} et donc

$$\min_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') \leq \alpha_{i+1}$$

Ceci étant vrai pour tout sous-espace de dimension i de $\mathbb{R}^{n-1}$, la question **III.3** (utilisée avec u_{n-1}) donne alors

$$\beta_i \leq \alpha_{i+1}$$

Soit maintenant F' de dimension i. Avec les mêmes notations,

$$\max_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') = \max_{x \in F, \|x\|=1} (u_{k-1}(x)|x) \geq \alpha_i$$

et donc

$$\beta_i \geq \alpha_i$$

III.4.2 Il suffit d'utiliser la question précédente avec $i = 1, \dots, n-1$ pour obtenir

$$\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_n$$

III.4.3 Les β_i sont les racines de $Q_{n-1} = P_{n-1}$ et les α_i celles de $Q_n = P_n$. La question précédente permet immédiatement de conclure.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE 2014 DE MATHEMATIQUES 2 DE LA FILIERE PSI

1/ REMARQUES GENERALES :

Le problème proposé portait sur l'étude de quelques propriétés de polynômes de Legendre. Il couvrait une partie substantielle du programme d'algèbre : anneaux de polynômes, algèbre linéaire et bilinéaire. Il faut malheureusement signaler qu'un nombre important de copies dénote une méconnaissance assez inquiétante du cours. Citons, par exemple, l'incompréhension du caractère défini positif d'un produit scalaire, ainsi que les propriétés de base des éléments propres d'un endomorphisme. On ne peut que déplorer le niveau extrêmement faible de certains candidats. Ils devraient comprendre que l'on attend d'eux des démonstrations et non des <<conjectures>> et que tout ne se démontre pas par récurrence.

De manière générale, les correcteurs ont apprécié les copies bien présentées, où les résultats démontrés apparaissent clairement après une démonstration bien construite. Un petit nombre de copies s'est révélé de très bon niveau.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Les candidats ont, pour l'essentiel, traité la première partie, ont abordé la seconde avec plus ou moins de réussite et ont traité quelques questions dans la troisième partie.

Les questions I.1.2 et I.2.3 mettent malheureusement en évidence, une connaissance très imparfaite, voire fantaisiste, du cours de base.

On remarque aussi, dans de nombreuses copies, l'usage inconsidéré de faux raisonnements par récurrence à savoir des démonstrations que les candidats veulent absolument voir comme des récurrences alors qu'ils n'utilisent pas l'hypothèse de récurrence.

Certains candidats se précipitent sur les questions calculatoires afin de glaner des points <<faciles>>. Encore faudrait-il que les calculs soient justes, ce qui est loin d'être toujours le cas. Savoir calculer sans s'essouffler dès la première ligne de calcul fait aussi partie des capacités requises qui sont évaluées par ce type d'épreuve.

<u>Partie I</u>
I.1 Les erreurs proviennent souvent soit d'une incompréhension du cours soit d'oublis partiels (caractère <<endo>>, caractère défini positif d'un produit scalaire).

I.2 En général, les candidats trouvent les polynômes U et V mais certains n'arrivent pas à en déduire le caractère autoadjoint de l'endomorphisme.

Dans la question I.2.3, les confusions entre polynôme unitaire et polynôme normé sont trop fréquentes. Beaucoup de candidats font semblant de croire qu'une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n est toujours formée d'une famille de polynômes de degrés échelonnés. La question I.2.4 n'est que partiellement traitée.

I.2.5 La détermination des racines de polynômes, pourtant simple, pose des problèmes à de trop nombreux candidats.

Partie II

II.1 De trop nombreux candidats veulent faire une démonstration par récurrence totalement inutile ici.

II.3 Peu de candidats traitent convenablement cette question et ceux qui montrent que μ_n est strictement positif sont très rares.

II.4-II.5 Beaucoup ont vaguement saisi l'idée d'une démonstration mais très peu la finalisent.

Partie III

III.1 Cette question est assez généralement bien traitée.

III.2 Cette question aussi est assez largement traitée par les candidats.

La suite du problème, plus difficile, est assez décevante à l'exception des questions III.4.2 et III.4.3 qui n'étaient, somme toute, que des corollaires faciles des questions précédentes. Certains l'ont vu et ont ainsi gagné des points.