

CCS TSI MATHS2 2020

Rémi Crétois, Éric Mercier, Michel Sortais

version du 2 juillet 2020

I Décompositions de matrices

I.A Un exemple introductif

Q 1. Un développement de $\det(P)$ suivant sa 2ème colonne permet de voir que

$$\det(P) = -(-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-9) = 27 \neq 0,$$

ce qui prouve bien que la matrice P est inversible. Donc la suite (c_1, c_2, c_3) des colonnes de P forme une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$, comme annoncé.

Q 2. • $u_1 = \frac{1}{\|c_1\|} \cdot c_1 = \frac{1}{3} \cdot c_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

• $v_2 = c_2 - \langle c_2; u_1 \rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

• $v_3 = c_3 - \langle c_3; u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle c_3; u_2 \rangle \cdot u_2 = c_3 - 0 \cdot u_1 - (-3) \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Conclusion : la famille $(u_1; u_2; u_3)$ donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

forme une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Q 3. Tant la base canonique $\mathcal{B}$ que la nouvelle base $\mathcal{B}_2$ constituent des bases orthonormées pour le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$; donc les matrices de passage $Q = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2)$ et $Q^{-1} = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B})$ sont *orthogonales*, ce qui revient à dire que $Q^{-1} = Q^T$.

Q 4. On a $R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$, et d'après les calculs effectués à la **Q2** :

- $u_1 = \frac{1}{3} \cdot c_1$, donc $c_1 = 3 \cdot u_1$,
- $u_2 = \frac{1}{3} \cdot (c_2 + c_1)$, donc $c_2 = 3 \cdot u_2 - 3 \cdot u_1$,

• $u_3 = \frac{1}{3} \cdot (c_3 + 3 \cdot u_2)$, donc $c_3 = 3 \cdot u_3 - 3 \cdot u_2$,
ainsi

$$R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) = \text{coord}_{(u_1, u_2, u_3)}(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Q 5. P est la matrice de changement de base où sont stockées (en colonnes) les coordonnées respectives de c_1, c_2 et c_3 dans la base canonique, autrement dit $P = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1)$. En composant les changements de base, on obtient tout aussi bien

$$P = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2) \times \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1),$$

soit $P = Q \times R$, ce qui est l'identité annoncée.

I.B Cas général : décomposition de QR

Q 6. Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de la matrice P . Comme P est inversible, $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. En appliquant à cette base le procédé de Gram-Schmidt, on parvient à former une nouvelle base $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_k),$$

et cette dernière propriété géométrique se traduit algébriquement par le fait que la matrice de passage $R^{-1} = \text{coord}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$ est triangulaire supérieure. Sa matrice inverse $R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$ est donc elle aussi *triangulaire supérieure*.

En outre, dans le procédé de Gram-Schmidt déjà mis en oeuvre à titre d'exemple dans la **Q2**, les identités

$$u_k = \frac{1}{\|v_k\|} \cdot v_k = \frac{1}{\|v_k\|} \cdot \left(c_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle c_k; u_j \rangle \cdot u_j \right)$$

donnent inversement :

$$c_k = \|v_k\| \cdot u_k + \sum_{j=1}^{k-1} \langle c_k; u_j \rangle \cdot u_j,$$

ce qui permet d'affirmer que tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure $R = \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1)$ sont bien *strictement positifs*.

Enfin, puisque les bases $\mathcal{B}$ (base canonique) et $\mathcal{B}_2$ sont toutes deux orthonormées, la matrice de passage $Q = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2)$ est bien une matrice *orthogonale*.

En conclusion, on peut affirmer que

$$P = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = \text{coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2) \times \text{coord}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) = Q \times R,$$

où Q est orthogonale, R triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs.

Q 7. L'équation donnée est alors équivalente à

$$Rx = Q^{-1}b = Q^T b = y$$

en posant $y = Q^T b = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$.

Comme R est triangulaire supérieure et à coeff. diagonaux strictement positifs, on pourra résoudre cette dernière équation "en remontant" : on commencera par observer que $x_n = \frac{1}{r_{n,n}} y_n$, ce qui permettra d'effectuer une substitution pour obtenir x_{n-1} à partir de l'identité $x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}} (y_{n-1} - r_{n-1,n} x_n)$, etc.

- Q 8.** Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de la matrice M , puis $C_1, C_2, \dots, C_n$ celles de la matrice I_n .
Pour $k \in [1; n]$, on dénote par $(\mathcal{H}_k)$ l'hypothèse

$$c_1 = C_1, c_2 = C_2, \dots, c_k = C_k$$

- *Initialisation* : montrons que $(\mathcal{H}_1)$ est vraie. Comme la matrice M est triangulaire supérieure, sa 1ère colonne est de la forme $c_1 = (m_{1,1}, 0, 0, \dots, 0)^T$, et comme M est orthogonale, cette 1ère colonne est normée, en sorte que $m_{1,1} = \pm 1$; enfin, puisque les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs, on doit avoir $m_{1,1} = 1$. Ainsi : $c_1 = (1\ 0\ 0 \dots 0)^T = C_1$, et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.
- *Hérédité* : pour $k \in [1; (n-1)]$, supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$ est vérifiée, et montrons que cela entraîne la validité de $(\mathcal{H}_{k+1})$.

Comme M est triangulaire supérieure, sa $(k+1)$ ème colonne est de la forme

$$c_{k+1} = (m_{1,k+1}, m_{2,k+1}, \dots, m_{k+1,k+1}, 0, 0, \dots, 0)^T$$

Comme M est orthogonale, en prenant en compte l'hypothèse $(\mathcal{H}_k)$, on obtient

$$m_{1,k+1} = \langle C_1; c_{k+1} \rangle = \langle c_1; c_{k+1} \rangle = 0, m_{2,k+1} = \langle C_2; c_{k+1} \rangle = \langle c_2; c_{k+1} \rangle = 0, \dots, m_{k,k+1} = \langle C_k; c_{k+1} \rangle = \langle c_k; c_{k+1} \rangle = 0,$$

en sorte que la $(k+1)$ ème colonne de M prend la forme $c_{k+1} = (0, 0, \dots, 0, m_{k+1,k+1}, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Toujours d'après l'orthogonalité de la matrice M , on doit avoir : $m_{k+1,k+1} = \pm 1$.

Enfin, comme M est à coefficients diagonaux strictement positifs, on obtient : $m_{k+1,k+1} = 1$, ce qui achève d'établir la validité de $(\mathcal{H}_{k+1})$.

- *Conclusion* : les deux points précédents permettent d'affirmer que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie, ce qui signifie que les colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de la matrice M coïncident avec celles de la matrice I_n , autrement dit que $M = I_n$.

N.B. : alternativement, sans suivre les indications, on pouvait se contenter d'observer que $M^{-1} = M^T$ est encore triangulaire supérieure, en sorte que M est à la fois orthogonale et diagonale; mais alors, chacun des coeff. diagonaux de M se doit d'être de la forme $m_{i,i} = \pm 1$, et comme par ailleurs M est à coeff. diagonaux > 0 , on obtient bien $M = I_n$.

- Q 9.** Les matrices triangulaires R_1 et R_2 ayant chacune un déterminant strictement positif, elles sont toutes deux inversibles; l'identité $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ donne alors successivement $Q_1 = Q_2 R_2 R_1^{-1}$ puis $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. Mais $Q_2^{-1} Q_1$ est une matrice orthogonale (comme produit de matrices orthogonales), tandis que $R_2 R_1^{-1}$ est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs, comme produit de 2 telles matrices. D'après la **Q8**, il s'ensuit que $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1} = I_n$, ce qui donne bien $Q_2 = Q_1$ et $R_2 = R_1$.

I.C Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

- Q 10.** Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice carrée A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. En appliquant alors la décomposition QR à la matrice inversible P , il vient

$$A = PTP^{-1} = (QR)T(R^{-1}Q^{-1}) = Q(RTR^{-1})Q^T = Q\tilde{T}Q^T,$$

et il reste à observer que $\tilde{T} = RTR^{-1}$ est bien triangulaire supérieure (comme produit de matrices triangulaires supérieures).

- Q 11.** Prenons pour matrice orthogonale Q une matrice déjà apparue dans la **Q3** :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et pour matrice triangulaire supérieure la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il est évident que la matrice carrée

$$A = QTQ^{-1} = QTQ^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 7/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, puisqu'elle possède trois valeurs propres distinctes ($Sp.(A) = Sp.(T) = \{1, 2, 3\}$). Toutefois, A n'est pas *orthogonalement* diagonalisable, puisqu'elle n'est pas symétrique.

N.B. : de façon plus minimaliste, on pouvait ici s'épargner quelques calculs en se contentant de poser $Q = I_3$.

Q 12. Ici encore, on pourrait procéder de façon (ultra) minimaliste en se contentant de poser : $A = Q = T = I_3$.

Alternativement, on pourra reprendre la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ et poser cette fois-ci $T =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui donne alors

$$A = QTQ^T = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2 \end{pmatrix}$$

II Calcul approché d'intégrales par quadrature

II.A Méthode de quadrature

II.A.1 Détermination des poids (w_i)

Q 13. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Observons que :

- si $i \neq j$: j figure parmi les indices k tels que $k \neq i$, donc le facteur $(X - r_j)$ figure au sein du produit $\prod_{k \neq i} (X - r_k)$; puisque $(X - r_j) | A_i$, on a : $A_i(r_j) = 0$.
- si $i = j$: en remplaçant X par r_i , on obtient

$$A_i(r_i) = \prod_{k \neq i} \frac{r_i - r_k}{r_i - r_k} = 1$$

On a donc bien, dans tous les cas : $A_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

Q 14. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum_{i=0}^n \alpha_i A_i = O_{\mathbb{R}_n[X]}$. D'après la question précédente, l'évaluation du

polynôme $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$ en r_j donne tout simplement

$$P(r_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i(r_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

Puisque P est le polynôme nul, on obtient

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

ce qui prouve la liberté de la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = (n+1)$, la famille libre $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ forme bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour un $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque, puisque $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe une unique suite finie $(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $P = \sum_{i=0}^n c_i A_i$. A nouveau, une évaluation en r_j donne

$$P(r_j) = \sum_{i=0}^n c_i A_i(r_j) = \sum_{i=0}^n c_i \delta_{i,j} = c_j,$$

en sorte que $P = \sum_{i=0}^n P(r_i) \cdot A_i$.

Q 15. Par hypothèse, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\int_{-1}^1 A_i(x) dx = \sum_{k=0}^n \omega_k A_i(r_k).$$

On applique ensuite la question 13 :

$$\boxed{\int_{-1}^1 A_i(x) dx = \omega_i}.$$

Q 16. D'après la question précédente, si les réels $\omega_0, \dots, \omega_n$ conviennent, alors ils valent pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\omega_i = \int_{-1}^1 A_i(x) dx. \text{ Il n'y a donc qu'une seule possibilité pour chaque } \omega_i.$$

Q 17. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question 14,

$$P = \sum_{i=0}^n P(r_k) A_i.$$

Ainsi, en posant pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\omega_i = \int_{-1}^1 A_i(x) dx$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega_k P(r_k) &= \sum_{k=0}^n P(r_k) \int_{-1}^1 A_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n P(r_k) A_k(x) dx && \text{en utilisant la linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_{-1}^1 P(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est bien vérifiée pour toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n .

Q 18. Lorsque $n = 0$, $A_0(X) = 1$ car on a un produit sans terme. Puis $\omega_0 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$.

Ainsi, $\boxed{\Sigma_r(f) = 2f(0)}$ car $r_0 = 0$. Si f est positive sur $[-1, 1]$, $\Sigma_r(f)$ est donc l'aire du rectangle dont un des côtés est $[-1, 1]$ et l'autre est de longueur $f(0)$.

Q 19. Lorsque $n = 1$, $r_0 = -1$ et $r_1 = 1$, on a :

$$A_0(X) = \frac{X - r_1}{r_0 - r_1} = -\frac{1}{2}(X - 1), \quad A_1(X) = \frac{X - r_0}{r_1 - r_0} = \frac{1}{2}(X + 1).$$

Puis,

$$\omega_0 = \int_{-1}^1 A_0(x) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^1 = 1$$

$$\omega_1 = \int_{-1}^1 A_1(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = 1$$

Ainsi, $\boxed{\Sigma_r(f) = f(-1) + f(1)}$. Si f est positive sur $[-1, 1]$, $\Sigma_r(f)$ est donc l'aire du trapèze rectangle de bases $f(-1)$ et $f(1)$ et de hauteur 2.

II.A.2 Majoration de l'erreur

Q 20. La fonction Q_r est polynomiale donc continue sur $[-1, 1]$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-1, 1]$ car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$.

Comme $|Q_r|$ et $|f^{(n+1)}|$ sont continues sur le segment $[-1, 1]$ elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Donc $N(f^{(n+1)})$ et $N(Q_r)$ sont bien définis.

Q 21. D'une part, $T_{r,f} \in \mathbb{R}_n[X]$ car c'est une combinaison linéaire des A_i et pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $T_{r,f}(r_i) = \sum_{k=0}^n f(r_k) A_k(r_i) = f(r_i)$ d'après la question **Q13**.

D'autre part, soit U un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $U(r_i) = f(r_i)$ pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors, d'après la question **Q14**, $U = \sum_{k=0}^n U(r_k) A_k = \sum_{k=0}^n f(r_k) A_k = T_{r,f}$. On a donc bien l'unicité de $T_{r,f}$.

Q 22. Par hypothèse, il existe $-1 < x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} < 1$, $n+2$ réels distincts tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $g(x_i) = 0$.

Pour chaque $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction g est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ car g est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ et $n \geq 0$. Comme $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $g'(y_i) = 0$.

Ainsi, la fonction g' s'annule aux $n+1$ points y_i pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ qui sont bien distincts car dans des intervalles disjoints.

Q 23. Montrons par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$.

— Initialisation : c'est la question **Q22**.

— Hérédité : soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et supposons que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$. La fonction $h = g^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-k+1}$ sur $[-1, 1]$, avec $n-k \geq 0$ et s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$. D'après la question 22, la fonction h' s'annule en au moins $n+2-(k+1)$ points distincts de $[-1, 1]$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1, 1]$. En particulier, pour $k = n+1$, $g^{(n+1)}$ s'annule en au moins un point de $[-1, 1]$.

Q 24. Si $x \in \{r_0, \dots, r_n\}$, on a $T_{r,f}(x) = f(x)$ d'après la question 21. En particulier, $f(x) - T_{r,f}(x) = 0$ et l'inégalité (II.1) est bien vérifiée car le membre de droite est positif ou nul.

Q 25. Comme $x \notin \{r_0, \dots, r_n\}$, $Q_r(x) \neq 0$. En posant $\lambda_x = \frac{f(x) - T_{r,f}(x)}{Q_r(x)}$ on obtient bien que

$$g_x(x) = f(x) - T_{r,f}(x) - \frac{f(x) - T_{r,f}(x)}{Q_r(x)} Q_r(x) = 0.$$

Q 26. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ et $T_{r,f}$ et Q_r sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$, la fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$g_x(r_i) = f(r_i) - T_{r,f}(r_i) - \lambda_x Q_r(r_i) = f(r_i) - f(r_i) = 0.$$

Donc g s'annule aux $n+2$ points $\{x, r_0, r_1, \dots, r_n\}$ qui sont distincts dans $[-1, 1]$.

D'après la question 23, il existe un réel $c_x \in [-1, 1]$ tel que $g_x^{(n+1)}(c_x) = 0$.

Or, le polynôme $T_{r,f}$ est de degré inférieur ou égal à n , donc $T_{r,f}^{(n+1)} = 0$. De plus, le polynôme Q_r est de degré $n+1$ et son terme dominant est X^{n+1} , donc $Q_r^{(n+1)} = (n+1)!$.

Ainsi,

$$0 = g_x^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - \lambda_x (n+1)! \iff \lambda_x = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

D'après la question 24, l'inégalité (II.1) est vérifiée si $x \in \{r_0, \dots, r_n\}$. Sinon, $f(x) - T_{r,f}(x) = \lambda_x Q_r(x) = \frac{Q_r(x) f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Ainsi,

$$|f(x) - T_{r,f}(x)| = \frac{|Q_r(x)| |f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!} \leq \frac{N(Q_r) N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}.$$

L'inégalité (II.1) est donc toujours vérifiée.

Q 27. On remarque que $\Sigma_r(f) = \Sigma_r(T_{r,f})$ d'après la question 21. Puis, d'après la question 17, $\Sigma_r(T_{r,f}) = \int_{-1}^1 T_{r,f}(x) dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |I(f) - \Sigma_r(f)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(x) - T_{r,f}(x)) dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x) - T_{r,f}(x)| dx \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{N(Q_r) N(f^{(n+1)})}{(n+1)!} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$|I(f) - \Sigma_r(f)| \leq 2 \frac{N(Q_r) N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}.$$

II.B Choix d'un jeu de nœuds

II.B.1 Nœuds équi-distants

Q 28. Comme les nœuds sont équi-distants avec $s_0 = -1$ et $s_n = 1$, on a $s_k = -1 + k \frac{2}{n} = -1 + kh$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Puis, avec $x = -1 + th$,

$$\begin{aligned} |Q_s(x)| &= \left| \prod_{k=0}^n (x - s_k) \right| \\ &= \prod_{k=0}^n |(-1 + th + 1 - kh)| \\ &= h^{n+1} \prod_{k=0}^n |t - k| \end{aligned}$$

Donc $|Q_s(x)| = h^{n+1} \varphi_{n+1}(t)$.

- Q 29.** La fonction φ_{n+1} est la valeur absolue d'une fonction polynomiale, donc est continue sur le segment $[0, n]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum. On remarque ensuite que si φ_{n+1} atteint son maximum en x_m , alors soit $x_m \in [0, n/2]$, et il n'y a rien à démontrer, soit $x_m \in [n/2, n]$, et alors $n - x_m \in [0, n/2]$ et

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(n - x_m) &= \prod_{k=0}^n |n - x_m - k| \\ &= \prod_{k=0}^n |x_m - (n - k)| && \text{en changeant tous les signes dans les valeurs absolues} \\ &= \prod_{i=0}^n |x_m - i| && \text{en faisant le changement d'indice } i = n - k \\ &= \varphi_{n+1}(x_m).\end{aligned}$$

Donc φ_{n+1} atteint aussi son maximum sur $[0, n/2]$.

- Q 30. ATTENTION**, il y a une erreur dans le sujet!

Le max à démontrer dans le sujet est celui de φ_3 **et non** de φ_2 .

Erreur d'indiciage puisque on définit φ_{n+1}

On détermine donc dans ce corrigé le max de φ_3 :

$$\varphi_3 : t \mapsto |t(t-1)(t-2)|$$

Sur $[0, 1]$, $t \mapsto t(t-1)(t-2)$ est positive donc $\varphi_3(t) = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t$ et alors $\varphi'_3(t) = 3t^2 - 6t + 2$ dont l'étude du signe sur $[0, 1]$ permet de dresser le tableau de variations de φ_3 .

x	0	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	1
φ'_3	+	0	-
φ_3	0	$\varphi_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	0

Sur $[0, 1]$; le maximum de φ_3 est donc $\max_{[0,1]} \varphi_3 = \varphi_3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Remarque : Il est encore plus facile de démontrer que $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$: **ce qui est nécessaire pour la récurrence suivante!**

- Q 31.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on démontre par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4}(n-1)!$ ».

— *Initialisation :*

Pour $n = 1$, la question précédente **ne fournit pas** : $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\frac{1}{4}(1-1)! = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, on obtient bien la propriété $\mathcal{P}_1$.

En revanche, on a démontré à la **Q30** que $\max_{[0,2]} \varphi_3 \geq \max_{[0,1]} \varphi_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq \frac{1}{4}(2-1)! = \frac{1}{4}$, on obtient bien la propriété $\mathcal{P}_2$, qui est inutile pour la suite...

— *Hérédité :*

Pour un certain entier non nul n , on suppose la propriété $\mathcal{P}_n$, c'est à dire, $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4}(n-1)!$, on obtient bien la propriété $\mathcal{P}_1$.

Alors,

$$\begin{aligned}
 \max_{[0, n+1]} \varphi_{n+2} &\geq \max_{[0, n]} \varphi_{n+2}(t) \\
 &\geq \max_{[0, n]} (\varphi_{n+1}(t) \times |t - (n+1)|) \\
 &\geq (n+1) \max_{[0, n]} \varphi_{n+1}(t) \\
 &\geq n \times \frac{1}{4} (n-1)! \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
 &\geq \frac{1}{4} n!
 \end{aligned}$$

— *Conclusion :*

On a démontré par récurrence que pour tout entier n : $\max_{[0, n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4} (n-1)!$.

Q 32. D'après **Q28**, $|Q_s(x)| = h^{n+1} \varphi_{n+1}(t)$, on en déduit donc la minoration :

$$N(Q_s) \geq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \frac{(n-1)!}{4} = \frac{2^{n-1} (n-1)!}{n^{n+1}}$$

II.B.2 Zéros des polynômes de Tchebychev

Q 33. La fonction $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$. Par composition, la fonction T_n est définie sur $[-1, 1]$.

Q 34. Soit $x \in [-1, 1]$:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 4 \cos^3(\arccos x) - 3 \cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x$$

Q 35. Soit n un entier naturel,,

$$T_n(-1) = \cos(n \arccos(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$T_n(0) = \cos(n \arccos(0)) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \Re(i^n)$$

$$T_n(1) = \cos(n \arccos(1)) = \cos(n \times 0) = 1$$

Q 36. T_n est définie sur $[-1, 1]$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0.

Pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
 T_n(-x) &= \cos(n \arccos(-x)) = \cos(n \times (\pi - \arccos(x))) \\
 &= \cos(n\pi - n \arccos(x)) \\
 &= \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) = T_n(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\cos(n \arccos(x)) = -T_n(x) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

Si n est pair, T_n est paire, si n est impair, T_n est impaire.

Q 37. Soit x un réel de $[-1, 1]$ et n un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) \\ &= 2\cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\arccos(x)\right)\cos\left(\frac{n+1-(n-1)}{2}\arccos(x)\right) \\ &= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\ &= 2xT_n(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)}$$

Q 38. On démontre par une récurrence double la propriété $\mathcal{P}_n$: « T_n est un polynôme de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} », pour n un entier non nul.

— *Initialisation* :

On vérifie la propriété pour les fonctions T_1 , T_2 , et T_3 déterminées à la question **Q34**.

— *Hérédité* : On suppose, pour un certain entier n non nul, que les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

On utilise la relation de récurrence déterminée dans la question **Q37** pour obtenir, pour tout réel $x \in [-1, 1]$:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

T_{n+1} et T_n étant des fonctions polynomiales, on en déduit que T_{n+1} est une fonction polynomiale.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, T_{n+1} est une fonction polynomiale, dont le degré est $\deg T_{n+1} = n+1$ et son coefficient dominant est 2^n .

Pour tout polynôme P et Q , $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, on en déduit que $\deg 2XT_{n+1} = n+2$ et le coefficient dominant du polynôme $2XT_{n+1}$ est 2^{n+1} .

Comme $\deg T_n = n-1 < \deg 2XT_{n+1}$, comme $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et que cette inégalité est stricte si $\deg P \neq \deg Q$, on obtient :

$$\boxed{T_{n+2} \text{ est une fonction polynomiale, } \deg T_{n+2} = n+2 \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n+1}}$$

— *Conclusion* : Par cette récurrence double, nous avons montré que pour tout entier n non nul, T_n est une fonction polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} .

Il reste à préciser que T_0 est une fonction polynomiale de degré 0 et que son coefficient est 1.

Remarque : Comme les fonctions sont polynomiales, on peut étendre leur domaine de définition à $\mathbb{R}$.

Q 39. Soit n un entier, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) = 0 &\Leftrightarrow (n+1)\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2n+2} + \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On pose $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ avec $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, et $x_k = \cos \theta_k$.

On a alors : $0 < \theta_0 = \frac{\pi}{2n+2} < \theta_1 < \dots < \theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n+2} < \pi$.

La fonction $\cos$ étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$ on a alors :

$$-1 < \cos \theta_n < \dots < \cos \theta_0 < 1 \Leftrightarrow -1 < x_n < \dots < x_0 < 1$$

Nous savons que le polynôme T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Le nombre de racines de ce polynôme est donc majoré par son degré, or, nous avons déterminé $n+1$ racines distinctes, donc l'ensemble de ses racines. En conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } T_{n+1} \text{ sont dans } [-1, 1] \text{ ce sont les réels : } x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right) \text{ avec } k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket .}$$

Q 40. T est un vecteurs de réels de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sur cet intervalle, $\arccos \cos \theta = \theta$, U est donc un vecteur de réels de $[-1, 0]$ et $Y = \cos(nT)$ le vecteur contenant les images des composantes de U par T_n .

def Tchebychev(n):

 T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)

 U = np.cos(T)

 Y = np.cos(n*T)

 return U, Y

Q 41. — Pour la courbe 1 : La fonction polynomiale vaut -1 en -1 donc n est impair. La fonction polynomiale est donc impaire et T_n admet donc 5 racines, donc ce cas correspond à $n = 5$.

— Pour la courbe 2 : C'est la courbe d'une fonction paire car $T_n(-1) = -1$, ce polynôme admet donc 8 racines, il s'agit donc du cas $n = 8$.

Q 42. On considère le jeux de noeuds $c = \left(c_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2n+2}\right), c_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2n+2}\right), \dots, c_n = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n+2}\right)\right)$.

$$Q_c = \prod_{k=0}^n (X - c_k) = \frac{1}{2^n} \times T_{n+1}$$

De plus, pour x dans $[-1, 1]$, $T_{n+1}(x) = \cos(\arccos(x)) \in [-1, 1]$ et $T_{n+1}(1) = 1$, on a : $\max_{x \in [-1, 1]} |T_{n+1}(x)| = 1$, finalement :

$$N(Q_c) = \frac{1}{2^n} \max_{x \in [-1, 1]} |T_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

II.B.3 Comparaison des ces deux jeux de noeuds

Q 43. D'après les question précédentes et en utilisant la formule de Stirling admise :

$$\begin{aligned} \frac{N(Q_c)}{N(Q_s)} &\leq \frac{1}{2^n} \frac{n^{n+1}}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{n^{n+1}}{2^{2n-1}(n-1)!} \\ &\sim \frac{n^{n+1}}{2^{2n-1} \times \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n} \\ &\sim \frac{n}{2^{2n-1} \times \sqrt{2\pi n} e^{-n}} \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{n^{\frac{1}{2}}}{e^{n(2\ln(2)-1)}} \end{aligned}$$

Comme $2\ln(2) - 1 > 0$ alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(Q_c)}{N(Q_s)} = 0$ d'après les théorèmes de comparaison.

Q 44. On a $N(Q_c) = o(N(Q_s))$

L'estimation est donc meilleure avec le jeu de noeuds c qu'avec le jeu de noeuds s .

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet comprend deux problèmes indépendants. Les domaines utilisés dans ce sujet recouvrent une grande partie du programme : le calcul matriciel, le produit scalaire, les polynômes, la trigonométrie, la dérivabilité et la continuité.

Analyse globale des résultats

Le sujet est de longueur raisonnable. Les candidats ayant une bonne connaissance du cours et utilisant correctement les définitions rappelées dans l'énoncé pouvaient obtenir un résultat honorable.

Le sujet a été globalement assez mal compris par les candidats et notamment le deuxième problème. Il fallait une bonne connaissance du cours des deux années afin d'aborder le sujet dans sa globalité. Cependant, le cours est souvent mal connu, les questions de cours simples n'ont pas été suffisamment bien réussies.

Beaucoup de candidats traitent les questions de manière aléatoire ce qui les empêche de comprendre le sujet de manière progressive.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Commentaires généraux

Cours

- Le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt n'est pas toujours bien mené.
- On relève une grande confusion sur la notion de matrices de passage, de nombreux candidats évoquent la matrice d'une base au lieu de la matrice de passages entre deux bases. Dans le cas de deux bases orthonormées peu de candidats se souviennent que la matrice de passage est orthogonale.
- La condition sur le polynôme caractéristique d'une matrice pour qu'elle soit trigonalisable est souvent inconnue.
- On note une méconnaissance de la notion de liberté d'une famille et une confusion avec la non colinéarité.
- Le théorème de Rolle est quasiment inconnu. Lorsqu'il est cité (ce qui est très rare) aucune hypothèse n'est donnée.
- La propriété qu'« une fonction continue sur un segment est bornée » est mal connue.

Calculs

- Le calcul du déterminant est dans la plupart des cas bien réalisé.
- Les candidats effectuent souvent des calculs inutiles. Il était inutile de calculer P^{-1} à la première question et inutile d'échelonner la matrice si on avait déjà montré que P était inversible.

- Le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt a souvent été réussi mais de nombreuses erreurs ont été relevées notamment dans les calculs des normes.
- Un certain nombre de candidats ne simplifie pas les calculs et laisse $\sqrt{9}$ au lieu de 3.

Raisonnement

Certaines copies ne sont pas suffisamment rédigées et abusent d'abréviations, ce qui nuit grandement à la compréhension des correcteurs, et sont donc pénalisées en conséquence. De même, le jury déplore le manque de soin apporté à de nombreuses copies, ce qui est encore une fois pénalisé. Les hypothèses de récurrence ne sont pas souvent définies. Il faudrait également, de façon générale, que les candidats démontrent leurs affirmations. Par ailleurs, exhiber un exemple n'a pas valeur de démonstration.

Points à améliorer

Un des défauts majeurs et récurrent des candidats est souvent l'absence de logique, la non compréhension (ou non lecture ?) des énoncés et la difficulté d'expression. Les hypothèses de récurrence ne sont pas ou sont mal posées. Les candidats traitent souvent les questions dans un ordre aléatoire ne se souciant aucunement de la cohérence du sujet. Cette approche est étrangère à toute démarche scientifique et ne permet pas d'obtenir un résultat convenable.

Remarques par question

I Décomposition de matrices

Q1. Le calcul du déterminant est assez souvent réussi mais le lien avec la famille des colonnes est mal exposé.

Q2. Bien traité dans de nombreuses copies mais des erreurs inattendues dans le calcul des normes.

Q3. Une question simple pour laquelle il suffisait de connaître la propriété de la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Q4, Q5. Assez souvent mal traitées ce qui dénote la méconnaissance de la notion de matrice de passage.

Q6. Très rarement traitée correctement. Seuls les candidats ayant assez de recul ont pu traiter cette question.

Q7. Une minorité de candidats sait expliquer comment résoudre un système déjà échelonné.

Q8. Beaucoup de candidats ont abordé cette question et ont donné des éléments de réponse qui ont été valorisées. Cependant une démonstration rigoureuse utilisait toutes les hypothèses de l'énoncé et devait se baser sur une matrice $n \times n$ et pas uniquement de taille 3.

Q9. Trop peu de candidats pensent à utiliser la question précédente.

Q10. Peu de candidats se souviennent qu'une matrice ayant son polynôme caractéristique scindée est trigonalisable (et non pas diagonalisable).

Q11, Q12. Il était comme souvent judicieux de se baser sur l'exemple de matrice orthogonale étudié dans la question 3.

II Calcul approché d'intégrales par quadrature

Q13. Souvent bien réussie.

Q14. La notion de famille libre est bien utilisée dans une minorité de copies. Il ne fallait surtout pas affirmer que la famille était échelonnée en degré ce qui était faux. En ce qui concerne le vocabulaire mathématique, il ne faut pas confondre la notion de dimension, de degré ou de cardinal.

Q15 – Q17. Très peu réussies. La notion de raisonnement par analyse synthèse n'est pas maîtrisée.

Q18, Q19. Mal comprises. Beaucoup de candidats évoquent une aire nulle ou négative.

Q20. Il suffisait ici d'utiliser le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

Q21. La relation est souvent montrée mais l'unicité très rarement.

Q22, Q23. Il s'agissait ici d'une application du théorème de Rolle qui est connu par un trop faible nombre de candidats.

Q24. Mieux réussie en général.

Q25 – Q27. Peu de candidats ont compris ces questions qui nécessitent une compréhension globale.

Q28 – Q32. Abordées partiellement par un plus grand nombre de candidats.

Q33. Question bien réussie, la réponse était quasiment donnée dans l'énoncé.

Q34, Q35, Q37. Ces questions ont été abordées par une proportion de candidats qui semblent assez à l'aise en trigonométrie.

Q36. Très peu réussie, les candidats oublient pour la plupart de justifier que le domaine de définition est symétrique par rapport à 0.

Q38. Une question très classique mais peu réussie. Il fallait conjecturer le degré et le coefficient dominant et démontrer le résultat à l'aide d'une récurrence double. L'hypothèse a été trop peu souvent énoncée.

Q39. Seules les toutes meilleures copies ont donné une réponse correcte.

Q40. Une question d'informatique souvent abordée mais mal réussie.

Q41. Cette question accessible en utilisant les résultats précédents a été abordée par de nombreux candidats.

Q42 – Q44. Questions quasiment jamais abordées.

Conclusion

Le sujet a posé des difficultés à la majorité des candidats. Une connaissance solide du cours permettait de mieux appréhender le sujet et d'obtenir un résultat convenable. Cependant, la mauvaise maîtrise de la langue et mauvaise compréhension de l'énoncé pénalisait fortement la plupart. Le jury a déploré de trop nombreuses et inquiétantes confusions dans la lecture de l'énoncé et dans la compréhension des définitions données dans le sujet.