

EPREUVE CENTRALE PSI 2020, MATH II en 4 h

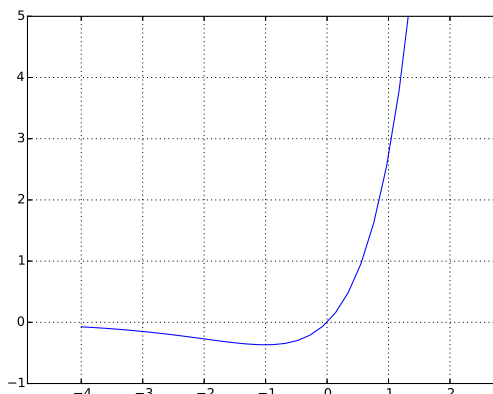
Les fonctions de Lambert

I. Fonction de Lambert

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1+x)e^x$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	0	e	$+\infty$

La fonction f est alors continue et strictement croissante de l'intervalle $[-1, +\infty[$. Appliquons le théorème de la bijection monotone : f réalise une alors bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$.



2. Le théorème de la bijection monotone implique aussi que la fonction réciproque

W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

De plus, comme f' ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$ et que f est de classe C^∞ , on sait que

W est de classe C^∞ sur $] -e^{-1}, +\infty[$.

3. Comme $f(0) = 0$, $W(0) = 0$.

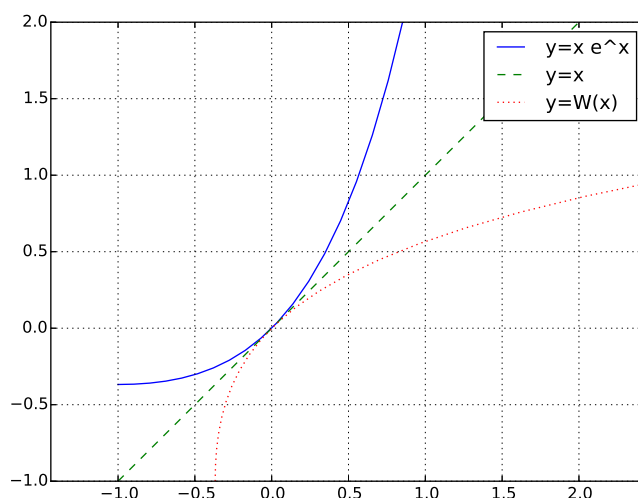
De plus, $W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = 1$.

4. Comme W est dérivable en 0, cela suffit à avoir son DL à l'ordre 1 : on a directement

$W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x) = x + o(x)$ donc $W(x) \sim x$ en 0.

Par définition de W , $W(x)e^{W(x)} = x$ donc $\ln W(x) + W(x) = \ln x$. Or $\ln u$ est négligeable devant u en $+\infty$. Comme $W(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\ln W(x) = o(W(x))$ et donc $W(x) \sim \ln x$ en $+\infty$.

5. Voici les 2 courbes :



La tangente à la courbe représentant f en $x = 0$ a pour équation

$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$: c'est la première bissectrice et par symétrie, c'est aussi la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant W .

Au point d'abscisse $-e^{-1}$, la courbe représentant W a une tangente verticale car $f'(-1) = 0$.

6. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $]0, 1]$.

De plus $x^\alpha W(x) \sim \frac{1}{x^{-1-\alpha}}$ en 0. Cette intégrale de Riemann est convergente sur $]0, 1]$ SSI $-1 - \alpha < 1$ SSI $-2 < \alpha$. Par comparaison de fonctions positives, $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ SSI $\boxed{-2 < \alpha}$.

L'application $h : x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

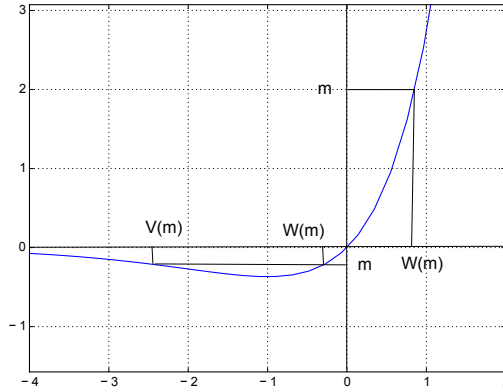
De plus $x^\alpha W(x) \sim \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ en $+\infty$.

Etudions l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ sur $[1, +\infty[$:

- Si $-\alpha \leq 1$, et si $x \geq e$, comme $\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \geq \frac{1}{x^{-\alpha}}$ et que $x \mapsto \frac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit par comparaison des fonctions positives que h n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Si $-\alpha > 1$, considérons le milieu du segment $[1, -\alpha]$, à savoir $k = \frac{1-\alpha}{2} > 1$. Alors $x^k \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = x^{\frac{1+\alpha}{2}} \ln x \rightarrow 0$ par croissance comparée en $+\infty$. On en déduit $\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = o(\frac{1}{x^k})$ avec $k > 1$. Par comparaison des fonctions positives, on obtient l'intégrabilité de h sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que $h : x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ SSI $\boxed{\alpha < -1}$.

8. Comme dans Q.1, la fonction f est continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty, -1]$. Comme $f(]-\infty, -1]) = [-e^{-1}, 0]$, f réalise une bijection entre ces 2 ensembles en appliquant le théorème de la bijection monotone.
9. A l'aide du tableau de variation de f , on étudie l'équation $f(x) = m$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions :
- Si $m < -e^{-1}$, $\mathcal{S} = \emptyset$
 - Si $m = -e^{-1}$, $\mathcal{S} = \{-1\} = \{V(-e^{-1})\} = \{W(-e^{-1})\}$, singleton
 - Si $-e^{-1} < m < 0$, $\mathcal{S} = \{V(m), W(m)\}$ de cardinal 2
 - Si $m \geq 0$, $\mathcal{S} = \{W(m)\}$, singleton
10. Toujours à l'aide du tableau de variation, en notant $\tilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq m$:
- Si $m < -e^{-1}$, $\tilde{\mathcal{S}} = \emptyset$
 - Si $m = -e^{-1}$, $\tilde{\mathcal{S}} = \{-1\}$
 - Si $-e^{-1} < m < 0$, $\mathcal{S} = [V(m), W(m)]$, segment
 - Si $m \geq 0$, $\mathcal{S} =]-\infty, W(m)]$, demi-droite.



11. Soit a et b deux réels non nuls. L'équation $e^{ax} + bx = 0$ équivaut à $f(-ax) = \frac{a}{b}$. Notons $\hat{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation

Avec Q9, on en déduit alors :

- Si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, $\hat{\mathcal{S}} = \emptyset$
- Si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$, $\hat{\mathcal{S}} = \{\frac{1}{a}\}$
- Si $-e^{-1} < \frac{a}{b} < 0$, $\hat{\mathcal{S}} = \{-\frac{1}{a}V(\frac{a}{b}), -\frac{1}{a}W(\frac{a}{b})\}$
- Si $\frac{a}{b} \geq 0$, $\hat{\mathcal{S}} = \{-\frac{1}{a}W(\frac{a}{b})\}$.

II. Probabilité

12. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et en utilisant la formule de probabilité totale appliquée au système complet d'événements $(N = k)_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n | N = k) \mathbb{P}(N = k).$$

Il reste à calculer $\mathbb{P}(X = n | N = k)$.

Clairement, si $k < n$, cette probabilité est nulle : il ne peut pas y avoir plus de billets gagnants que de billets.

Si $k \geq n$, on reconnaît une loi binomiale de paramètre k et p : $\mathbb{P}(X = n | N = k) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$.

Il suffit alors de calculer

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = n | N = k) \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui donne à l'aide d'un changement d'indice :

$$\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} p^n (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+n}}{(k+n)!} = e^{-\lambda} \lambda^n p^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On reconnaît enfin une série exponentielle et $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \lambda^n p^n \frac{1}{n!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^n e^{-\lambda p}}{n!}$. Ceci est une

loi de Poisson et $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p) \text{ et } \mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p.}$

13. La variable aléatoire X est positive d'espérance finie : on peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2}$$

Si $p \leq 2 \frac{1-\alpha}{\lambda}$, on a immédiatement $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha}.$

14. Calculons directement $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - e^{-\lambda p} - \lambda p e^{-\lambda p}$.
En manipulant les inégalités, $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff -e^{-\lambda p}(1 + \lambda p) \leq -\alpha$.

Posons $x = -(\lambda p + 1)$: $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff x e^x \leq -\alpha e^{-1}}$.

15. Utilisons Q.10 et en remarquant que $-\alpha e^{-1} \in]-e^{-1}, 0[$, on se retrouve dans le cas du segment :
 $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff x \in [V(m), W(m)]$ avec $m = -\alpha e^{-1}$.

Il reste à repasser en la variable p :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff -\frac{W(m) + 1}{\lambda} \leq p \leq -\frac{V(m) + 1}{\lambda}$$

La plus grande valeur possible est donc $\boxed{p = -\frac{V(m) + 1}{\lambda}}$.

Il reste à regarder si cette valeur est dans $]0, 1[$. C'est le cas SSI $\lambda > -1 - V(-\alpha e^{-1})$.

Dans ce cas, le plus grand p satisfaisant la condition est $p = -\frac{V(-\alpha e^{-1}) + 1}{\lambda}$.

Dans le cas contraire, un tel p n'existe pas.

16. $X(\Omega) = \{0, \dots, r\}$ et comme chaque bit a une probabilité de changer de $1 - p$, on reconnait une loi binomiale de paramètre $1 - p$ et r donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(r, 1 - p), \mathbb{E}(X) = r(1 - p) \text{ et } \mathbb{V}(X) = rp(1 - p)}.$$

17. La variable aléatoire X est positive d'espérance finie : on peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{r(1 - p)}{2}$$

Si $r \leq 2 \frac{1 - \alpha}{1 - p}$, on a immédiatement $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha}$.

18. Calculons directement $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p^r - r(1 - p)p^{r-1}$.
En manipulant les inégalités, $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff -p^r - r(1 - p)p^{r-1} \leq -\alpha$.

$$\text{Or } -p^r - r(1 - p)p^{r-1} = (1 - p)p^{r-1} \left(\frac{p}{p-1} - r \right) = \frac{(1 - p)p^{r-1}}{\ln p} \left(\frac{p \ln p}{p-1} - r \ln p \right) = x p^r \frac{1}{a}$$

Et $e^x = p^r e^{-a}$ permet d'écrire $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff \frac{x}{a} e^x e^a \leq -\alpha$,

ce qui donne bien $\boxed{x e^x \leq -\alpha a e^{-a}}$.

19. Utilisons Q.10 : posons $m = -\alpha a e^{-a} = \alpha f(-a)$. Par Q1, comme $a = \frac{p \ln p}{p-1} > 0$, on a déjà $-e^{-1} \leq f(-a) < 0$ et comme $\alpha \in]0, 1[$, on a $-e^{-1} \leq f(-a) < \alpha f(-a) = m < 0$. On a alors avec Q. 10, l'ensemble des solutions pour x est le segment $[V(m), W(m)]$.

Repassons en la variable r avec $\ln p < 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha \iff \frac{W(m) + a}{\ln p} \leq r \leq \frac{V(m) + a}{\ln p}$$

Reste à savoir si $[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}]$ contient des entiers naturels non nuls (r : nombre de bits).

On a vu que $m = -\alpha a e^{-a} = \alpha f(-a) > f(-a)$. Comme W est croissante, $W(m) > W(f(-a))$. Or, $-a$ est dans l'intervalle $[-1, +\infty[$ ($-1 \leq -a$ SSI $1 \geq a$ SSI $p \ln p - p \geq -1$ ce qui se démontre en étudiant rapidement la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ qui est décroissante sur $]0, 1[$ et qui vaut -1 en 1) donc $W(f(-a)) = -a$

et $W(m) + a > 0$. La borne inférieure du segment $[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}]$ est donc négative.

Donc $[\frac{W(m) + a}{\ln p}, \frac{V(m) + a}{\ln p}]$ contient un naturel non nul SSI $\frac{V(m) + a}{\ln p} \geq 1$ SSI $V(m) + a \leq \ln p$.

On obtient donc pour l'existence d'un plus grand entier tel que $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1 - \alpha$ la condition :

$$\boxed{V(m) + a \leq \ln p}.$$

20. Cet entier vaut alors $\boxed{\lfloor \frac{V(m) + a}{\ln p} \rfloor}$.

III. Développement en série entière

21. Pour tout entier k , A_k est de degré k . La famille $(A_0, \dots, A_n)$ est une famille de polynômes de degré échelonné : cette famille est libre, de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

22. En dérivant,

$$A'_k(X) = \frac{1}{k!}(X - ka)^{k-1} + \frac{1}{k!}X(k-1)(X - ka)^{k-2} = \frac{(X - ka)^{k-2}}{k!}(kX - ka)$$

$$\text{donc } A'_k(X) = \frac{(X - a - (k-1)a)^{k-2}}{(k-1)!}(X - a) = A_{k-1}(X - a).$$

23. Si $j > k$, comme A_k est de degré k , $A_k^{(j)} = 0$.

Si $j = k$, comme A_k est de degré k , $A_k^{(j)}$ est un polynôme constant égal au coefficient dominant fois $k!$, ce qui donne 1.

Si $j < k$, avec Q.21, par itération, $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja)$ et ce qui donne $A_k^{(j)}(ja) = 0$.

24. Par linéarité de la dérivation, $P^{(j)} = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}$ puis $P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j$ à l'aide de Q.22

25. Appliquons la question précédente à $P = (X + y)^n$:

$$(X + y)^n = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(ka) A_k = P(0) + \sum_{k=1}^n P^{(k)}(ka) \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}.$$

Calculons $P^{(k)}(ka)$. Comme $P^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!}(X + y)^{n-k}$, on obtient bien

$$(X + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k} X(X - ka)^{k-1} \text{ ce qui donne le résultat en évaluant en } x.$$

26. Dérivons la relation précédente par rapport à x :

$$n(x + y)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k} (x - ka)^{k-1} + xQ(x) \text{ avec } Q \text{ polynôme.}$$

$$\text{puis évaluons en } 0 : ny^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k} (-ka)^{k-1}.$$

27. Si $x \neq 0$, posons $u_n = |a_n x^n| = \frac{|x|^n n^{(n-1)}}{n!} > 0$.

$$\text{Calculons } \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = |x| \exp((n-1) \ln(1 + \frac{1}{n})) \longrightarrow |x|e.$$

Appliquons alors la règle de d'Alembert :

- Si $|x| < \frac{1}{e}$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
- Si $|x| > \frac{1}{e}$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

$$\text{On en déduit que } R = \frac{1}{e}.$$

28. D'après le cours, on sait que la somme S est C^∞ sur $] -R, R[$ et que $S^{(n)}(0) = n!a_n = (-n)^{(n-1)}$ si $n \geq 1$ et $S(0) = 0$.

29. Etudions la convergence absolue en R de la série entière.

$$|a_n R^n| = \frac{n^{(n-1)}}{e^n n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}^{3/2}} \text{ à l'aide de la formule de Stirling.}$$

On obtient alors une série de Riemann convergente et par comparaison des séries à termes positifs, le série $\sum a_n R^n$ est absolument convergente. La somme S est donc bien définie en R et $-R$.

De plus, $\forall x \in [-R, R]$, $|a_n x^n| \leq |a_n R^n|$: on a le terme général d'une série majorante convergente. La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-R, R]$ et comme chaque fonction

$x \mapsto a_n x^n$ est continue, on obtient avec le théorème de continuité d'une série de fonctions que la somme S est continue sur $[-R, R]$.

30. La somme S est C^∞ sur $] - R, R[$ et $\forall x \in] - R, R[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

En regardant la relation à démontrer, on reconnaît un produit de Cauchy et en terme de stratégie de calculs, on aura intérêt à faire d'abord le produit $xS'(x)$ pour arranger les puissances : $xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$.

De plus, $1 + S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Nos sommes ne commencent pas à 0 mais si on pose $a_0 = 1$, alors on peut écrire :

$$1 + S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ et } xS'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n.$$

Ces séries sont absolument convergente pour tout x dans $] - R, R[$, on peut donc effectuer leur produit de Cauchy et on obtient :

$$x(1 + S(x))S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

avec $b_0 = a_0 0 a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^n a_k (n-k) a_{n-k} = n a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} (n-k) \frac{(-(n-k))^{n-k-1}}{(n-k)!} \\ &= n a_n + \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k)^{k-1} (n-k)^{n-k} \end{aligned}$$

Appliquons alors Q.26 avec $a = -1$ et $y = n$:

$$\begin{aligned} n n^{n-1} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (k)^{k-1} (n-k)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k)^{k-1} (n-k)^{n-k} + n^{n-1} \text{ donc} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (k)^{k-1} (n-k)^{n-k} &= (n-1) n^{n-1} \end{aligned}$$

Finalement, $b_n = n a_n + \frac{(-1)^n}{n!} (n-1) n^{n-1} = n a_n - (n-1) a_n = a_n$ et

$$x(1 + S(x))S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = S(x).$$

31. h est de classe C^1 sur $] - R, R[$ car S l'est et $\forall x \in] - R, R[$, $h'(x) = S'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)}$. Appliquons Q.30 pour simplifier $xh'(x) = xS'(x)(1 + S(x))e^{S(x)} = S(x)e^{S(x)} = h(x)$. h est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$xy' - y = 0.$$

32. Sur $]0, R[$ ou sur $] - R, 0[$, cette équation se met sous forme résolue : $y' - \frac{1}{x}y = 0$.

On sait alors que les solutions s'écrivent $x \mapsto \lambda \exp(\ln x) = \lambda x$ sur $]0, R[$ et de la forme $x \mapsto \mu x$ sur $] - R, 0[$ avec λ, μ réels.

Cherchons maintenant les solutions sur $] - R, R[$. Procédons par analyse-synthèse.

Supposons qu'il existe h solution sur $] - R, R[$. Alors h est solution sur $]0, R[$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \tilde{h}_\lambda : x \mapsto \lambda x$ sur $]0, R[$. De même il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel $h = \hat{h}_\mu : x \mapsto \mu x$ sur $] - R, 0[$.

h est continue en 0 et $\tilde{h}_\lambda$ et $\hat{h}_\mu$ tendent toutes les deux vers 0 en 0, cela ne donne pas de condition sur les réels λ et μ .

h est dérivable en 0 et en regardant la limite des taux d'accroissement à droite et à gauche de 0, on obtient que $h'(0) = \lambda = \mu$ donc h est de la forme $x \mapsto \lambda x$ sur $] - R, R[$.

Réciproquement, $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ sur $] - R, R[$ est dérivable sur $] - R, R[$ et est solution de l'équation sur $] - R, R[$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $] - R, R[$ est donc $\boxed{\{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

33. Reprenons la fonction h définie par $\forall x \in] - R, R[, h(x) = S(x)e^{S(x)}$. Par Q.32, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h : x \mapsto \lambda x$ sur $] - R, R[$. De plus, $h'(0) = \lambda = (S(0) + S'(0)S(0))e^{S(0)} = 1$ donc $h : x \mapsto x$.

On en déduit que $\boxed{\forall x \in] - R, R[, S(x)e^{S(x)} = x = f(S(x))}$.

On va appliquer la question Q.9 avec $m = x$.

On a déjà que si $m \geq 0$, $S(x) = W(x)$.

Si $m = x < 0$, on peut avoir $S(x) = V(x)$ ou $S(x) = W(x)$. Cependant, montrons que dans ce cas $S(x) > -1$.

$$\text{Si } -R < x < 0, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} (x)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} (-x)^n < 0$$

$$\text{De même, } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} n(x)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} n(-x)^{n-1} > 0$$

A l'aide de Q.30, $x(1 + S(x))S'(x) = S(x)$, on en déduit que si $-R < x < 0$, $S(x) + 1 > 0$ donc $S(x) > -1$.

Il reste alors à appliquer Q1. pour en déduire que $\boxed{S(x) = W(x) \text{ pour tout } x \in] - R, R[}$.

Autre solution toujours dans la cas $-R < x < 0$ pour montrer $S(x) = W(x)$ et non $V(x)$: par l'absurde, s'il existe $x_0 \in] - R, 0[$ tel que $S(x_0) = V(x_0) < W(x_0)$, alors par continuité de S , décroissance de V et croissance de W sur $] - R, 0[$, on obtiendrait $S(x) = V(x)$ pour tout $x \in [x_0, 0[$, ce qui donnerait en passant à la limite à gauche en 0 : $S(x) \rightarrow -\infty$. Absurde car S est continue en 0.

34. Par Q.29, S est continue sur $[-R, R]$. Par Q.2, W est aussi continue $[-R, R]$: les 2 fonctions coïncident donc sur $[-R, R]$.

IV. Approximation uniforme

35. Soit x un réel positif fixé. Calculons $\phi_x(W(x)) = x \exp(-xe^{-W(x)})$.

Par définition de $W(x)$, $W(x)e^{W(x)} = x$ donc $xe^{-W(x)} = W(x)$ d'où

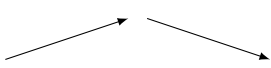
$$\phi_x(W(x)) = xe^{-W(x)} = W(x) : \boxed{W(x) \text{ est donc bien un point fixe de } \phi_x}$$

36. La fonction ϕ_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composée d'applications de classe C^2 .

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'_x(t) = x^2 e^{-t} \exp(-xe^{-t}) \geq 0$ et si on utilise Q.1, en remarquant que $\phi'_x(t) = -xf(-xe^{-t})$ et en utilisant la minoration de f par $-e^{-1}$, on obtient $\phi'_x(t) \leq -x(-e^{-1}) = \frac{x}{e}$.

On peut aussi calculer $\phi''_x(t) = x^2 e^{-t} \exp(-xe^{-t})(-1 + xe^{-t})$ qui est positive SSI $x \geq e^t$ SSI $\ln x \geq t$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$	$\ln x$	$+\infty$
$\phi''_x(t)$	+	0	-
ϕ'_x			

On en déduit que ϕ'_x a un maximum atteint en $t = \ln x$ et que ce maximum vaut $\phi'_x(\ln x) = x \exp(-xe^{-\ln x}) = x \exp(-x/x) = \frac{x}{e}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi'_x(t) \leq \frac{x}{e}}$$

37. La fonction ϕ_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi'_x(t) \leq \frac{x}{e}$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis avec $a, b \in \mathbb{R} : |\phi_x(b) - \phi_x(a)| \leq \frac{x}{e}|b - a|$ et prenons ensuite $a = w_{n-1}(x)$ et $b = W(x)$. Par Q.35, $\phi_x(W(x)) = W(x)$ et par définition de la suite (w_n) , $\phi_x(w_{n-1}(x)) = w_n(x)$ donc

$$|w_n(x) - W(x)| \leq \frac{x}{e}|w_{n-1}(x) - W(x)|$$

et par récurrence immédiate

$$\boxed{\forall x \in [0, e], \forall n \in \mathbb{N}, |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |w_0(x) - W(x)| = \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)|}$$

38. Soit a un réel de $]0, e[$. Par la question précédente, $\forall x \in [0, a], \forall n \in \mathbb{N}$,

$$|w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_{\infty, [0, a]}.$$

La majoration précédente est valable pour tout $x \in [0, a]$ et le majorant obtenu ne dépend pas de x : on peut passer à la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|w_n - W\|_{\infty, [0, a]} \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_{\infty, [0, a]}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$:

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (w_n) \text{ converge uniformément vers } W \text{ sur } [0, a].}$$

39. Soit $\varepsilon > 0$.

On a vu en Q.2 que W est continue en e et en Q.1 que $W(e) = 1$: il existe alors $a \in]0, e[$ tel que $\forall x \in]a, e[, |W(x) - W(e)| = |W(x) - 1| \leq \varepsilon$.

Avec Q.35, $\forall x \in]a, e[, \forall n \in \mathbb{N}, |w_n(x) - W(x)| \leq \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leq |1 - W(x)| \leq \varepsilon$.

Avec Q.38, il existe un N_0 tel que $\forall n \geq N_0, \forall x \in [0, a], |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon$.

Donc, $\forall n \geq N_0, \forall x \in [0, e], |w_n(x) - W(x)| \leq \varepsilon$:

il y a $\boxed{\text{convergence uniforme de la suite } (w_n) \text{ vers } W \text{ sur } [0, e].}$

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Ce problème s'intéresse à des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles, définies comme réciproques sur certains intervalles de la fonction $x \mapsto xe^x$. On établit diverses propriétés de ces fonctions, en particulier le fait que l'une d'elle est développable en série entière au voisinage de zéro. Deux applications en probabilité sont mises en avant.

Ce sujet, d'une longueur très raisonnable, comporte plusieurs parties assez indépendantes et permet de contrôler les connaissances des candidats dans des domaines variés d'analyse et de probabilité de première et seconde année.

Il n'encourage cependant pas le grappillage, chaque question nécessitant soit une bonne compréhension du contexte soit une vraie connaissance du cours. Quelques questions plus difficiles n'ont été comprises que par les meilleurs candidats.

Analyse globale des résultats

Les candidats ont su exploiter le sujet pour montrer leurs compétences en choisissant les parties les plus à leurs convenances et ne sont jamais restés bloqués sur un point. La plupart des questions est assez simple et a permis de bien classer les candidats en fonction de leur compréhension de la question, de la précision des connaissances et de la rigueur de la réponse.

Le jury a été agréablement surpris par la gestion de certains calculs, par le nombre de candidats ayant su obtenir l'identité d'Abel et son corollaire et globalement par les connaissances en probabilité. En revanche très peu de candidats sont capables de résoudre une équation différentielle linéaire aussi simple que $xy' = y$.

Par ailleurs le jury a moins apprécié la présentation des copies, l'écriture et l'abus d'abréviations mystérieuses et, bien pire encore, les contre vérités flagrantes, surtout accompagnées de « d'après le cours », et les escroqueries.

Les meilleurs candidats sont ceux qui prennent le temps de comprendre chaque question et d'argumenter chaque réponse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le cours rarement utilisé avec assez de précision

En Q1 et Q8 entre continuité, stricte monotonie (justifiée) et limite en l'infini il y a souvent au moins un argument manquant.

Le résultat concernant la dérivabilité de la réciproque n'est pas connu.

En Q12 et 16 il était indispensable d'utiliser l'indépendance et, si tous les candidats connaissent l'espérance des lois usuelles, la variance a moins de succès.

En Q13 et 17 avant d'appliquer l'inégalité de Markov il fallait préciser positivité (et intégrabilité).

La Q28 a donné lieu à moins de 40 % de bonnes réponses pour la valeur des dérivés en 0.

En Q30 pour effectuer un produit de Cauchy il est souhaitable de regarder le rayon des deux séries entières et, lorsque le terme constant de l'une est nul, de s'en apercevoir.

Des questions pas toujours assez comprises

En Q11 les paramètres a et b sont non nuls, inutile de discuter ces cas particuliers ; le sujet demande explicitement d'utiliser les fonctions V et W .

En Q22 la formule $A'_k(X) = A_{k-1}(X-a)$ a souvent été mal comprise, le membre de droite étant vu comme un produit au lieu d'une composition. Un argument de degré rendait cette interprétation impossible.

Le cours doit être cité parfaitement, mais il n'est pas utile de le redémontrer (sauf mention explicite d'une question de cours). De nombreux candidats ont perdu du temps en déterminant espérance et variance de loi de Poisson, binomiale, ou des points en donnant une justification complètement erronée de la régularité d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence

Manque de soin, incohérence

En Q3 la moitié des réponses sont fausses, il suffisait pourtant de connaître la dérivée d'une réciproque, et plus grave la contradiction avec le graphe de Q5 n'est jamais signalée.

En Q5 moins de 40 % des candidats proposent un graphe soigné avec des tangentes mises en évidence. Rappelons qu'une verticale ne coupe jamais le graphe d'une fonction en plus d'un point.

En Q6 des erreurs de signe pour l'étude des intégrales de Riemann, la continuité sur $]0, 1]$ est rarement rappelée.

De nombreuses compositions d'équivalents, d'erreurs dans l'ordre des développements limité.

En Q21 étourderie fréquente sur la dimension.

En III.B la présence d'un $(-1)^n$ ne suffit pas pour appliquer le critère spécial.

En Q38 seule une minorité de candidats semble avoir compris la différence entre convergence simple et uniforme et très peu majorent proprement $|1 - W(x)|$ par une constante.

Oubli fréquent des cas particuliers : cas $m = e^{-1}$ pour lequel les deux solutions sont confondues, dérivation de $(X - a)^{k-1}$ pour $k = 1$, premiers termes de la somme pour le calcul de la loi de X ...

Insistons enfin sur la question 32. La moitié de ceux qui traitent la question se trompe dans la résolution de $xy' = y$ sur un intervalle ne contenant pas 0. Les erreurs de signe se corrigeaient facilement si le candidat prenait le temps de vérifier que sa solution est bien solution, et obtenir un ensemble de solutions qui n'est pas une droite vectorielle est vraiment inquiétant. Quant au raccordement des solutions il n'est correctement traité que dans 10 % des copies.

Conclusion

Le jury invite les futurs candidats à mettre avant tout l'accent sur l'apprentissage du cours. Les exercices de base ne sont pas à négliger, mais ne doivent pas être confondus avec le cours : il est bon de savoir quand les intégrales de Bertrand convergent ou que $(1 + 1/n)^n$ ne converge pas vers 1, mais cela ne dispense pas de savoir le démontrer.

Nous les engageons à privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation.

Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signale honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.