Concours E3A 2018

Épreuve de mathématiques 2 PSI, trois heures

Corrigé

Partie 1

1.

1. Les solutions de l'équation homogène $y' - ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec $K \in \mathbb{R}$. De plus, la méthode de la variation de la constante permet de démontrer que l'application $x \mapsto -e^{ax} \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est une solution particulière de l'équation $y' - ay + f = 0$. On en déduit que les solutions de (E_a^f) sur I sont de la forme :

$$x \mapsto Ke^{ax} - e^{ax} \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

Après factorisation par e^{ax}, on obtient la forme voulue.

2. Soient z_1 et z_2 deux solutions de (E_a^f) bornées sur I. Alors $z_1 - z_2$ est également bornée ; or, d'après la question précédente, il existe des réels K_1 et K_2 tels que :

$$\forall x \in I,\ z_1(x) = e^{ax} \left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \right), \text{ et } z_2(x) = e^{ax} \left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \right),$$

donc : $\forall x \in I,\ z_1(x) - z_2(x) = e^{ax}(K_1 - K_2)$. Comme $e^{ax} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$ pour $a > 0$, cette application ne peut être bornée qu'à la condition que $K_1 - K_2 = 0$, c'est-à-dire $K_1 = K_2$ et donc $z_1 = z_2$. Ainsi il y a au plus une solution de (E_a^f) bornée sur I.

3. L'application $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue en tant que produit d'applications continues : nous allons démontrer son intégrabilité par relation de comparaison.
L'application f est bornée sur I ; soit, donc, un réel $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$. Alors :

$$\forall t \in I, \quad \left| e^{-at} f(t) \right| \leqslant M e^{-at}.$$

Comme $a > 0$, l'application $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur I et donc $t \mapsto e^{-at} f(t)$ également par comparaison. Ceci implique en particulier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

4. L'unicité a déjà été établie dans la question 1.2. Il s'agit donc seulement de vérifier que F est une solution de (E_a^f) bornée. Pour montrer que F est solution de (E_a^f), on peut se contenter de vérifier qu'elle est de la forme explicitée dans la question 1.1, avec $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.
En effet, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ F(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t &= e^{ax} \left(\int_x^1 e^{-at} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \right) \\ &= e^{ax} \left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \right). \end{aligned}$$

Montrons à présent que F est bornée : comme dans la question précédente, soit $M > 0$ un réel tel que $|f| \leqslant M$. Alors :

$$\forall x \in I,\ |F(x)| \leqslant e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant Me^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = Me^{ax} \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty} = \frac{M}{a},$$

donc F est bornée (par la constante $\frac{M}{a}$). Ceci démontre le résultat.

2. 1. L'application 1 est bien sûr continue et bornée (par 1), donc $1 \in \mathscr{E}$ et $U_a(1)$ existe.
Soit $x \in I$. Alors :

$$U_a(1)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = e^{ax} \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{a},$$

donc $U_a(1)$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{a}$.

2. Soit $f \in \mathscr{E}$. Comme f est continue sur I, l'application $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur I en tant que produit d'applications continues, donc sa primitive $x \mapsto \displaystyle\int_{+\infty}^{x} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ l'est également (elle est même de classe C^1). Par conséquent $U_a(f) : x \mapsto e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur I en tant que produit d'applications continues. De plus elle est bornée d'après la question 1.4 : ceci montre que $U_a(f) \in \mathscr{E}$; ainsi l'image de U_a est bien incluse dans $\mathscr{E}$. La linéarité de U_a provient de la linéarité de l'intégrale, donc $U_a : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est un endomorphisme.

3. (a) Pour déterminer si U_a est injectif, on étudie son noyau : soit $f \in \ker(U_a)$. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t = 0$$

(on divise l'égalité $U_a(f)(x) = 0$ par $e^{ax} \neq 0$). En dérivant cette égalité, on obtient :

$$\forall x \in I, \quad -e^{-ax}f(x) = 0.$$

Or l'exponentielle ne s'annule jamais, donc cela implique $f = 0$. Ceci démontre que $\ker(U_a) = \{0\}$, c'est-à-dire : U_a est un endomorphisme injectif.

(b) On reprend l'argumentation de la question 2.2. Si $f \in \mathscr{E}$, il a été mentionné que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I en tant que primitive d'une application continue, et $x \mapsto e^{ax}$ l'est également, donc leur produit $U_a(f)$ aussi.

(c) La question précédente démontre que $U_a(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{E}_1$, or $\mathscr{E}_1 \neq \mathscr{E}$ puisqu'il existe des applications continues qui ne sont pas de classe C^1 sur I : l'application $x \mapsto \sqrt{x-1}$ en est un exemple (elle n'est pas dérivable en 1). Par conséquent $U_a(\mathscr{E}) \neq \mathscr{E}$ et U_a n'est pas surjectif.

4. Tout d'abord, les applications cos et sin sont continues et bornées (par 1), donc appartiennent à $\mathscr{E}$; cet ensemble étant stable par combinaison linéaire, $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos, \sin)$ est inclus dans $\mathscr{E}$, et il est donc possible de discuter de l'image par U_1 de cet espace vectoriel. Pour montrer que $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos, \sin)$ est stable par U_1, il suffit de vérifier que $U_1(\cos) \in \mathscr{F}$ et $U_1(\sin) \in \mathscr{F}$. Pour cela, nous avons besoin de calculer $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$. Or, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t + i\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} e^{(i-1)t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right]_x^{+\infty} \\ &= -\frac{e^{(i-1)x}}{i-1} \\ &= -\frac{(-i-1)e^{(i-1)x}}{2} \\ &= \frac{i+1}{2}e^{-x}(\cos(x) + i\sin(x)).\end{aligned}$$

En développant et en identifiant parties réelles et imaginaires, on en déduit, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(x) - \sin(x)\right), \quad \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right).$$

On en déduit :

$$U_1(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin) \in \mathscr{F}, \quad U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin) \in \mathscr{F},$$

donc $\mathscr{F}$ est bien stable par U_1 ; si on note V l'endomorphisme induit par U_1 sur $\mathscr{F}$, alors la matrice de V relativement à la base $(\cos, \sin)$ est $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on note $\Omega = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors Ω est la matrice d'une rotation planaire de mesure d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ (avec la convention que $(\cos, \sin)$ est une base directe de $\mathscr{F}$), et on a $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Omega$.

3. 1. Soit $r \geqslant 0$. L'application $f_r : x \mapsto e^{-rx}$ est continue et bornée sur I (par e^{-r} par exemple), donc $f_r \in \mathscr{E}$ et $U_a(f_r)$ existe. Alors :

$$\forall x \in I,\ U_a(f_r)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t}\mathrm{d}t = e^{ax}\left[\frac{e^{-(a+r)t}}{-(a+r)}\right]_x^{+\infty} = e^{ax}\frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{e^{-rx}}{a+r},$$

donc : $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r}f_r$. Comme $f_r \neq 0$, on a montré que f_r est un vecteur propre de U_a pour la valeur propre $\frac{1}{a+r}$.

2. Soit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$. Comme $\lambda \leqslant \frac{1}{a}$, on a $\frac{1}{\lambda} \geqslant a$, et il existe donc $r \geqslant 0$ tel que $\lambda = \frac{1}{a+r}$: on prend pour cela $r = \frac{1}{\lambda} - a \geqslant 0$. Nous avons démontré dans la question précédente que pour tout $r \geqslant 0$, le réel $\frac{1}{a+r}$ est valeur propre de U_a : donc λ est valeur propre de U_a.
3. Soit $r \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_a^n(f_r) = \left(\frac{1}{a+r}\right)^n f_r$ d'après la question 3.1. Donc, pour tout $x \in I$, on a :

$$U_a^n(f_r)(x) = \left(\frac{1}{a+r}\right)^n e^{-rx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } a+r > 1, \\ e^{-rx} & \text{si } a+r = 1, \\ +\infty & \text{si } a+r < 1, \end{cases}$$

donc la suite de fonctions $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I si et seulement si $a+r \geqslant 1$; elle converge vers la fonction identiquement nulle si $a+r > 1$, et vers f_r si $a+r = 1$.
4. Soit $r \geqslant 0$, et soit $x \in I$. À une constante multiplicative non nulle près, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)(x)$ est la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{a+r}\right)^n$; elle converge donc si et seulement si $\dfrac{1}{a+r} < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $a+r > 1$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ converge simplement sur I si et seulement si $a+r > 1$ (il y a même convergence normale). Dans ce cas, on a :

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r)(x) = e^{-rx} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a+r}\right)^n = e^{-rx} \frac{1}{1 - \frac{1}{a+r}} = e^{-rx} \frac{a+r}{a+r-1},$$

donc : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1} f_r$.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$, et soit $x \in I$. On fait le changement de variable affine $u = t - x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$. Alors :

$$U_a(f)(x) = e^{ax} \int_0^{+\infty} e^{-a(u+x)} f(u+x)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(u+x)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t+x)\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

5. 1. Il est tentant de proposer $(g_0, \dots, g_p)$ pour base de $\mathscr{F}_p$; par définition de cet espace vectoriel, c'en est une famille génératrice. Montrons donc qu'elle est libre : soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k g_k = 0$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k e^{-x} = 0.$$

En multipliant cette égalité par e^x, on obtient :

$$\forall x \in I, \quad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k = 0.$$

Pour tout $x \in I$, le réel x est donc racine du polynôme $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$; or I est infini, donc ce polynôme admet une infinité de racines et doit être nul, c'est-à-dire : $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k X^k = 0$, ou encore : $\alpha_0 = \cdots = \alpha_p = 0$. Ceci montre que la famille $(g_0, \ldots, g_p)$ est libre en plus d'engendrer $\mathscr{F}_p$, donc c'est une base de $\mathscr{F}_p$ qu'on note désormais $\mathscr{B}_p$.

2. Pour montrer que l'espace vectoriel $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(g_0, \ldots, g_p)$ est inclus dans $\mathscr{E}$, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a $g_k \in \mathscr{E}$. Il est clair que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'application g_k est continue : il reste à montrer qu'elle est bornée sur I.
Soit, donc, $k \in [\![0, p]\!]$. Notons d'abord que $g_k \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Alors, par définition de la limite, il existe $x_0 \in I$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, on ait $|g_k(x)| \leqslant 1$. De plus, l'application $|g_k|$ étant *continue* sur le *segment* $[1, x_0]$, elle est bornée, disons par un réel m. En considérant $M = \max(m, 1)$, on a : $\forall x \in I$, $|g_k(t)| \leqslant M$, donc g_k est bornée sur I.
(*Il est aussi possible d'étudier les variations de g_k grâce au signe de g_k', facile à déterminer puisque pour tout $x \in I$, on a : $g_k'(x) = x^{k-1}(k-x)e^{-x}$. Le maximum de g_k est atteint en k, donc pour tout $x \in I$ on a $0 \leqslant g_k(x) \leqslant g_k(k) = k^k e^{-k}$: l'application g_k est bornée.*)
On a donc bien l'inclusion $\mathscr{F}_p \subseteq \mathscr{E}$, et on peut considérer l'action de U_a sur ce sous-espace vectoriel. Nous allons montrer par récurrence sur k que $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.
(*L'idée de procéder par récurrence provient du fait qu'en intégrant par parties, une primitive de l'exponentielle étant elle-même à peu de choses près, on ramène l'étude de $U_a(g_k)$ à celle de $U_a(g_k')$; or $g_k' = kg_{k-1} - g_k$ d'après ce qui précède, faisant le lien entre $U_a(g_{k-1})$ et $U_a(g_k)$.*)
Si $k = 0$, on a $U_a(g_0) = U_a(f_1) = \frac{1}{1+a} g_0 \in \mathscr{F}_p$ d'après la question 3.1. À présent, soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, et supposons que $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$. Alors, en dérivant g_{k+1} et en intégrant $x \mapsto e^{-ax}$ (on vérifie préalablement que le terme $\left[t^{k+1} e^{-t} \frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty}$ est bien défini, et égale $x^{k+1} \frac{e^{-(1+a)x}}{a}$ grâce aux croissances comparées), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ U_a(g_{k+1})(x) &= e^{ax}\left(x^{k+1}\frac{e^{-(1+a)x}}{a} - \int_x^{+\infty} \left((k+1)t^k - t^{k+1}\right) e^{-t} \frac{e^{-at}}{-a} \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{a} x^{k+1} e^{-x} + \frac{k+1}{a} e^{ax} \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} e^{-at} \mathrm{d}t - \frac{1}{a} e^{ax} \int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} e^{-at} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donc : $\left(1 + \frac{1}{a}\right) U_a(g_{k+1}) = \frac{1}{a} g_{k+1} + \frac{k+1}{a} U_a(g_k)$. Or $g_{k+1} \in \mathscr{F}_p$ et, par hypothèse de récurrence, $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$ donc $\left(1 + \frac{1}{a}\right) U_a(g_{k+1}) \in \mathscr{F}_p$. On a $1 + \frac{1}{a} \neq 0$, donc $U_a(g_{k+1}) \in \mathscr{F}_p$.
Par principe de récurrence, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$. Comme la famille $(g_0, \ldots, g_p)$ engendre $\mathscr{F}_p$, on en déduit que $\mathscr{F}_p$ est stable par U_a.

3. Une analyse attentive de la démonstration par récurrence de la question précédente montre que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\left(1 + \frac{1}{a}\right) U_a(g_k) - \frac{1}{a} g_k \in \mathscr{F}_{k-1}$, ou encore $U_a(g_k) - \frac{1}{1+a} g_k \in \mathscr{F}_{k-1}$. On a de plus montré que $U_a(g_0) = \frac{1}{1+a} g_0$, donc la matrice de l'endomorphisme induit par

U_a sur $\mathscr{F}_p$, dans la base $\mathscr{B}_p = (g_0, \dots, g_p)$, est triangulaire supérieure et de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+a} & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix},$$

et son déterminant égale le produit des coefficients diagonaux, c'est-à-dire : $\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^{p+1}$.

6. Soit $f \in \mathscr{E}$. Pour tout $x \in I$ on a, d'après la question 4 et l'inégalité triangulaire :

$$|U_a(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |e^{-at} f(x+t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(x+t)|\mathrm{d}t = U_a(|f|)(x),$$

donc : $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

7. Soit $f \in \mathscr{E}$. Si $f \geqslant 0$, alors pour tout $x \in I$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a $e^{-at} f(x+t) \geqslant 0$ parce que l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $U_a(f)(x) \geqslant 0$ en intégrant cette inégalité sur $[0, +\infty[$, l'intégrale étant croissante.

8. Soit $f \in \mathscr{E}$ décroissante. Pour tout $x \in I$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a donc $f(x+t) \leqslant f(x)$. En multipliant cette inégalité par $e^{-at} \geqslant 0$, et en intégrant sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\forall x \in I,\ U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x)\mathrm{d}t = f(x)\left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^{+\infty} = f(x) \times \frac{1}{a},$$

donc, a étant un réel strictement positif : $aU_a(f) \leqslant f$.

Montrons à présent que $U_a(f)$ est décroissante : soient $x, x' \in I$ tels que $x \leqslant x'$. L'application f étant décroissante, pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $f(x+t) \geqslant f(x'+t)$. En multipliant cette inégalité par $e^{-at} \geqslant 0$, et en intégrant sur $[0, +\infty[$, on obtient $U_a(f)(x) \geqslant U_a(f)(x')$: ceci démontre que $U_a(f)$ est décroissante sur I.

9.

1. Soit $f \in \mathscr{H}$. Alors $U_a(f')$ est bien défini ; en intégrant par parties (on intègre $x \mapsto f'(x+t)$ en choisissant la primitive $x \mapsto f(x+t)$, et on dérive $t \mapsto e^{-at}$; le terme $[e^{-at} f(x+t)]_0^{+\infty}$ est bien défini et égale $-f(x)$), pour tout $x \in I$ on a :

$$U_a(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f'(x+t)\mathrm{d}t = -f(x) + \int_0^{+\infty} ae^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t,$$

donc : $U_a(f') = -f + aU_a(f)$, ce qu'il fallait démontrer.

2. D'après la question 1.4, $U_a(f)$ est solution de (E_a^f), donc vérifie :

$$U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0,$$

et il vient d'être établi que $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$. En comparant ces deux égalités, on obtient $U_a(f') = U_a(f)'$, ce qu'on peut réécrire ainsi :

$$U_a(D(f)) = D(U_a(f)).$$

Ceci vaut pour toute application $f \in \mathscr{H}$, donc U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

10. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition P_n suivante :

$$\text{« } \forall f \in \mathscr{E},\ \forall x \in I,\ U_a^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t. \text{ »}$$

On a P_0 par définition même de $U_a(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. À présent, soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons P_n. Soit $f \in \mathscr{E}$; on a $U_a^{n+2}(f) = U_a^{n+1}(U_a(f))$ et $U_a(f) \in \mathscr{E}$, donc d'après P_n :

$$\forall x \in I,\ U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U_a(f)(t)\mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties, en intégrant $t \mapsto \dfrac{(t-x)^n}{n!}$ et en dérivant $t \mapsto e^{-at}U_a(f)(t)$ (notons que $U_a(f)$ est bien dérivable d'après la question 2.3.b). Rappelons que pour tout $x \in I$, on a $e^{-ax}U_a(f)(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$, donc la dérivée de $t \mapsto e^{-at}U_a(f)(t)$ est $t \mapsto -e^{-at}f(t)$. Si l'on met provisoirement de côté le terme entre crochets, l'intégration par parties donne donc :

$$\forall x \in I,\ U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \left(\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t \right).$$

Inspectons de plus près le terme $\left[\dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty}$: nous avons démontré dans la question 1.4 que $U_a(f)$ est bornée pour toute application $f \in \mathscr{E}$, disons par une constante $M > 0$. Donc :

$$\left| \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} (t-x)^{n+1} e^{-at} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées : ceci démontre que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. De plus, ce terme égale 0 quand $t = x$, donc $\left[\dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty}$ est bien défini et égale 0. On en déduit :

$$\forall x \in I,\ U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t,$$

et ceci vaut pour toute application $f \in \mathscr{E}$, donc on a P_{n+1}.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

11. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge, et on a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. On en déduit :

$$\forall x \in I,\ \forall t \geqslant x,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) = e^{-at} f(t) e^{t-x}.$$

2. Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. D'après la question 10, et en faisant le changement de variable affine $u = t - x$, on a :

$$U_a^n(f)(x) = e^{ax} \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a(u+x)} f(u+x) \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-au} f(u+x) \mathrm{d}u.$$

Or, f étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$, et on a alors :

$$|U_a^n(f)(x)| \leqslant \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-au} \mathrm{d}u.$$

Calculons cette dernière intégrale : on fait le changement de variable linéaire $v = au$ pour se ramener à l'intégrale dont la valeur nous est donnée dans l'énoncé. On a :

$$\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-au} \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^{n-1} e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{a} = \frac{(n-1)!}{a^n},$$

donc finalement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|U_a^n(f)(x)| \leqslant \dfrac{M}{a^n}$. Puisque, par hypothèse, on a $a > 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{a^n}$ converge. Par comparaison, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} U_a^n(f)(x)$ converge absolument, donc converge.
Ceci vaut pour tout $x \in I$, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} U_a^n(f)$ converge simplement sur I.

3. Soit $x \in I$. Nous allons calculer explicitement $S(x) = e^{ax} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t$ grâce à la question 11.1 : pour cela, nous avons besoin d'intervertir somme et intégrale. Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \dfrac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[x, +\infty[$, et on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \left| \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \right| \mathrm{d}t = U_a^{n+1}(|f|)(x)$ d'après la question 10 ;
   - la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(t \mapsto \dfrac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \right)$ converge simplement sur I d'après la question 11.1, et sa somme $t \mapsto e^{-at} f(t) e^{t-x}$ est continue par morceaux sur I ;
   - la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \displaystyle\int_x^{+\infty} \left| \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \right| \mathrm{d}t = \sum\limits_{n \geqslant 0} U_a^{n+1}(|f|)(x)$ converge d'après la question 11.2.

   Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont donc vérifiées, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{t-x} f(t) \mathrm{d}t.$$

Enfin : $S(x) = e^{(a-1)x}\int_x^{+\infty} e^{(1-a)t}f(t)\mathrm{d}t = U_{a-1}(f)(x)$: ceci vaut pour tout $x \in I$, donc $S = U_b(f)$ avec $b = a-1$. La question 3.4 en est un cas particulier.

Partie 2

1. Si $g \in \mathscr{E}$, alors $\int_1^{+\infty} e^{-at}g(t)\mathrm{d}t$ converge d'après la question 1.3 de la partie 1. Ici, par hypothèse, $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(g(t))$, donc $e^{-at}f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-at}g(t))$. D'après le résultat admis, on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Après multiplication par e^{ax}, on a $U_a(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(U_a(g)(x))$, d'où le résultat.

2. Avec les hypothèses de la question, on a $f - g = \underset{+\infty}{o}(g)$ et g est à valeurs positives. Donc, d'après la question précédente, on a $U_a(f-g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$. L'application U_a étant linéaire, cela implique $U_a(f) = U_a(g) + \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$, c'est-à-dire : $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$ ayant une limite finie en $+\infty$.
Si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, cela signifie précisément que $f = \underset{+\infty}{o}(1)$ et donc, d'après la question 1 de cette partie, on en déduit $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(1))$. Or $U_a(1)$ est une application constante d'après la question 2 de la partie 1, donc $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(1)$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = 0$.
Si $\lim\limits_{+\infty} f = L \neq 0$, alors $f \underset{+\infty}{\sim} L$ et donc, d'après la question 1 de cette partie, on en déduit $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(L)$. Or $U_a(L) = LU_a(1) = \frac{L}{a}$ d'après la question 2 de la partie 1, donc $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{L}{a}$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \frac{L}{a}$.

Dans tous les cas, $U_a(f)$ admet une limite finie en $+\infty$: on a plus précisément $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \frac{\lim\limits_{+\infty} f}{a}$.

4.
1. Soit $x \in I$. Intégrons par parties, en dérivant $h_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et en intégrant $t \mapsto e^{-at}$; le terme $\left[\frac{e^{-at}}{-a}\frac{1}{t^\omega}\right]_x^{+\infty}$ est bien défini et égale $\frac{e^{-ax}}{ax^\omega}$, donc :
$$H_\omega(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\omega}\mathrm{d}t = e^{ax}\left(\frac{e^{-ax}}{ax^\omega} - \frac{\omega}{a}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^{\omega+1}}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{x^\omega} - \frac{\omega}{a}e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^{\omega+1}}\mathrm{d}t,$$
donc : $H_\omega(x) = \dfrac{1}{a}h_\omega(x) - \dfrac{\omega}{a}H_{\omega+1}(x)$.
2. Pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\omega+1}}$ étant décroissante, on a d'après la question 8 de la partie 1 :
$$0 \leqslant H_{\omega+1}(x) \leqslant \frac{1}{ax^{\omega+1}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\omega}\right).$$
On en déduit : $H_\omega(x) = \dfrac{1}{a}h_\omega(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(h_\omega(x))$, donc : $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a}h_\omega(x)$.

5. 1. Soit $x \in I$. Pour tout $t \in [1,x]$, on a $e^{-at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^k}{k!}$, et donc :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t$$
$$= \ln(x) + \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t.$$

On aimerait permuter intégrale et somme ; c'est un problème d'interversion. Or la série entière $\sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}$ est de rayon de convergence infini : c'est, au terme constant près et à multiplication par t près, une série exponentielle (*on peut aussi invoquer la règle de D'Alembert*). En particulier, elle converge normalement (donc uniformément) sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence, qui est $\mathbb{R}$; elle converge donc uniformément sur le segment $[1,x]$, ce qui permet d'intégrer terme à terme :

$$\int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^x \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^k}{k!} \left[\frac{t^k}{k}\right]_1^x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!k}\left(x^k - 1\right).$$

On en déduit :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!k}\left(x^k - 1\right).$$

2. Soit $x \in I$. Par définition, et d'après la question précédente, on a :

$$H_1(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = e^{ax}\left(\int_x^1 \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t\right)$$
$$= e^{ax}\left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!k}\left(x^k - 1\right) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t\right),$$

d'où le résultat.

Partie 3

1. On a $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r} f_r$ d'après la question 3.1 de la première partie. Or $\int_1^{+\infty} f_r = \int_1^{+\infty} e^{-rt}\mathrm{d}t$ converge pour $r > 0$ (c'est une intégrale de référence), donc $\int_1^{+\infty} U_a(f_r)$ converge.

2. Tout d'abord, H_ω est continue sur I d'après la question 2.3.b de la première partie. Ensuite, il a été démontré que $H_\omega(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a} h_\omega(x)$ dans la question 4.2 de la deuxième partie. Or $h_\omega : x \mapsto \frac{1}{x^\omega}$ est positive sur $[1, +\infty[$ et intégrable sur ce même intervalle si et seulement si $\omega > 1$, donc par comparaison de fonctions positives l'application H_ω est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\omega > 1$.

3. 1. Soit $x \in I$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, Φ est dérivable et on a $\Phi' = F$. Alors :

$$\Phi'(x) - F(1) = F(x) - F(1) = \int_1^x F'(t)\mathrm{d}t$$

et comme, d'après la question 1.4 de la première partie, l'application F est solution de (E_a^f), on a $F' = -f + aF$, donc :

$$\Phi'(x) - F(1) = -\int_1^x f(t)\mathrm{d}t + a\int_1^x F(t)\mathrm{d}t = -\varphi(x) + a\Phi(x),$$

d'où le résultat.

2. Puisque f est positive et intégrable sur I par hypothèse, pour tout $x \in I$ on a :

$$0 \leqslant \varphi(x) = \int_1^x f \leqslant \int_1^{+\infty} f.$$

Ceci montre que φ est bornée, et cette application est continue en tant que primitive de l'application continue f, donc $\varphi \in \mathscr{E}$.

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ converge revient précisément à démontrer que la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x F(t)\mathrm{d}t$ existe, et est finie.

Tout d'abord, puisque f est supposée positive, l'application $F : x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est également positive, et donc l'application $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\mathrm{d}t$ est croissante. Par conséquent, Φ admet nécessairement une limite en $+\infty$, soit finie, soit infinie. Montrons par l'absurde qu'elle ne peut pas être infinie : si tel est le cas, alors l'égalité :

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = F(1) - \Phi'(x) + a\Phi(x)$$

implique, quand $x \to +\infty$, que $\varphi(x) \to +\infty$, car $a \neq 0$ et $\Phi' = F$ est bornée d'après la question 2.2 de la partie 1. Mais c'est impossible, puisque $\varphi \in \mathscr{E}$. Par l'absurde, on en déduit que Φ admet une limite finie, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ converge.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$ une application intégrable ; alors $|f| \in \mathscr{E}$ est à valeurs positives et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f|$ converge. D'après les questions 3.1 à 3.3 de cette partie, on en déduit que $U_a(|f|)$ est intégrable sur I. Or, d'après la question 6 de la partie 1, on a $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$; par comparaison, l'application $U_a(f)$ est intégrable sur I.

Compte rendu épreuve Maths 2 PSI

Le sujet portait sur l'étude d'une transformation intégrale liée à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre.

Le début du problème avait pour but de vérifier les connaissances de base des étudiants sur les fonctions définies par une intégrale fonction de sa borne supérieure.

Nous avons pu constater que trop de candidats ne savent pas dériver correctement la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue. Certains pensent même devoir utiliser la dérivation des intégrales à paramètre pour s'en sortir. Il semble que la notion de primitive d'une fonction soit très vague pour beaucoup.

La notion de fonction et de fait celle de variable, semble plus que confuse dans l'esprit de nombreux candidats : s'en suivent des résultats incohérents et(ou) contradictoires qui ne les gênent aucunement. Par exemple : si l'énoncé propose une fonction $f : x \mapsto f(x)$ nous voyons apparaître des expressions du type : $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}t$ (cf question **3.1.** de la partie **1**).

Comment des étudiants ayant effectué deux ans de classes préparatoires scientifiques peuvent-ils se fourvoyer à ce point ?

Les candidats semblent traiter chaque question indépendamment des questions précédentes et trop rarement réfléchir à la cohérence de leurs résultats. Ont-ils une habitude suffisante de résoudre des problèmes ?

Trop d'étudiants pensent que les $g_k(x) = \mathrm{e}^{-x}\,x^k$ sont des fonctions polynomiales de degré k et appliquent sans vergogne le résultats des polynômes de degré échelonné...

On a remarqué trop de confusion entre endomorphisme itéré et dérivations itérées. (question **10.**)

Toujours à la question **10.**, trop peu d'étudiants ont vu qu'une seule intégration par partie suffisait pour obtenir le résultat demandé : nous sommes étonnés puisque la démonstration se décalque sur celle de la formule de Taylor avec reste intégral censée être vue en cours.

Comme d'habitude les questions concernant les séries de fonctions ont été traitées de manière trop approximative : nous n'avons pas trop pénalisés les étudiants au niveau du barème.

Enfin, les candidats n'hésitent pas à prendre des équivalences portant sur deux variables à la fois !

En conclusion, sur un sujet certes un peu long, mais qui comportait beaucoup de questions élémentaires ou de technicité moyenne, nous avons été étonnés du manque de solidité dans les connaissances et de savoir faire dans des calculs simples. Est-il utile de rappeler que le plus souvent les questions posées le sont pour guider le candidat dans sa recherche d'une solution et lui permettre de montrer ses connaissances ?

Les notions d'analyse de base ne semblent pas toujours acquises correctement. Nous renouvelons les conseils donnés l'an dernier : rigueur, lecture soignée de l'énoncé, connaissance approfondie du cours. Par ailleurs un entraînement régulier et soutenu à la recherche de problèmes est fondamentale.

Rappelons que le jury valorise toujours la bonne restitution du cours, la qualité et la concision de la rédaction et des calculs.

Pour finir signalons que nous avons vu d'excellentes copies où la totalité des questions a été traitée correctement.