

CENTRALE-SUPÉLEC MATH 2 PC 2019
PROPOSITION de CORRIGÉ

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A - Dérivées successives

Q 1. En organisant les calculs de façon à préparer la question suivante, on obtient, pour $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1 + \sin x}{(\cos x)^2}, \quad f''(x) = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x + 1}{(\cos x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{\sin^3 x + 4 \sin^2 x + 5 \sin x + 2}{(\cos x)^4}.$$

Q 2. La fonction f est clairement de classe C^∞ sur I . La propriété à démontrer (existence d'un polynôme P_n) est vraie au rang 0 avec $P_0 = X + 1$ et, si elle est vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1 - \sin^2 x) P'_n(\sin x) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}},$$

où P_{n+1} est le polynôme $P_{n+1} = (n+1)X P_n + (1 - X^2) P'_n$.

On a alors $P_0 = P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 + 2X + 1$ et $P_3 = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$.

Notons que l'unicité du polynôme P_n est immédiate par l'argument classique: un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

Q 3. La propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ (initialisation) et, si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on peut écrire $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Par la relation de récurrence obtenue en **Q 2.**, on calcule alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \sum_{k=0}^n (n+1) a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} - \sum_{k=1}^n k a_k X^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (n+1) a_{k-1} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) a_{k-1} X^k \\ &= X^{n+1} + 2a_{n-1} X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k+2) a_{k-1} + (k+1) a_{k+1} \right) X^k + a_1. \end{aligned}$$

Le polynôme P_{n+1} ainsi écrit est bien unitaire de degré $n+1$, à coefficients entiers naturels, ce qui achève la récurrence.

Remarque. Il en résulte que $P_n(t)$ est positif pour $t \in \mathbb{R}_+$, cela sera utile en **Q 6**.

Q 4. Pour $x \in I$, on a

$$1 + f(x)^2 = \frac{\cos^2 x + 1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 + 2 \sin x}{\cos^2 x} = 2 f'(x).$$

Q 5. On constate $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule de Leibniz,

$$2 f^{(n+1)} = (2 f')^{(n)} = (f^2 + 1)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$

$$\text{En évaluant en } 0, \text{ cela donne } 2 \alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.B - Développement en série entière

Q 6. Comme $\alpha_n = f^{(n)}(0)$, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N f^{(N+1)}(t)}{N!} dt .$$

Or, $f^{(N+1)}(t) = \frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}$ est positif car $\sin t \geq 0$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et d'après la remarque faite à la fin de **Q 3**. L'intégrande étant positif sur $[0, x]$ avec $x \geq 0$, le reste intégral est positif, d'où l'inégalité

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leq f(x) .$$

Q 7. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées d'après **Q 6.**, elle est donc convergente. La série entière considérée étant convergente pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, son rayon de convergence R est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$.

Q 8. Pour $x \in I$, on écrit, en faisant le “carré de Cauchy” d'une série entière dans son intervalle de convergence,

$$\begin{aligned} 1 + g(x)^2 &= 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \right)^2 \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n \\ &= 1 + \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha_{n+1}}{n!} x^n \quad \text{d'après Q 5.} \\ &= 2\alpha_1 + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha_n x^{n-1}}{(n-1)!} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2 g'(x) . \end{aligned}$$

Q 9. Pour $x \in I$, posons $\varphi(x) = \text{Arctan}(f(x))$ et $\psi(x) = \text{Arctan}(g(x))$. Les fonctions φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $\varphi' = \frac{f'}{1+f^2}$ et $\psi' = \frac{g'}{1+g^2}$. Les questions **Q 4.** et **Q 8.** montrent que $\varphi' = \psi' = \frac{1}{2}$, donc $\varphi = \psi + C$ sur I , où C est une constante. Comme $\varphi(0) = \psi(0) = \frac{\pi}{4}$, la constante est nulle et $\varphi = \psi$. Comme $f(x) = \tan(\varphi(x))$ et $g(x) = \tan(\psi(x))$, on déduit $f = g$ sur I .

Remarque. De ce calcul, on déduit aussi que $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$, et donc qu'une autre expression de f sur I est $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, ce qui n'est pas forcément intéressant...

Q 10. On observe que $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$. Si on avait $R > \frac{\pi}{2}$, la fonction g , somme de la série entière, serait prolongeable en une fonction continue sur $] -R, R[$, ce qui contredirait la présence d'une limite infinie en $(\frac{\pi}{2})^-$. Avec **Q 7.**, on conclut $R = \frac{\pi}{2}$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Par analyse-synthèse (l'intervalle I est symétrique par rapport à 0):

Analyse: si p et i existent, alors pour tout x , on a $h(x) = p(x) + i(x)$ et $h(-x) = p(x) - i(x)$, on en déduit que, nécessairement, $p(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}$, d'où l'unicité de p et i ;

Synthèse: les fonctions p et i dont les expressions ont été obtenues dans la partie analyse sont respectivement paire et impaire, et leur somme est h , d'où l'existence de p et i .

Q 12. On décompose f en sa partie paire et sa partie impaire:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \tan(x) .$$

On fait de même pour g :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} .$$

La question **Q 11.** permet d'identifier les parties paires et impaires, d'où les égalités demandées.

Q 13. Par le cours sur les séries entières, on a, pour tout k entier naturel,

$$t^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad t^{(2k+1)}(0) = \alpha_{2k+1} .$$

Q 14. On a $\forall x \in I \quad (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$, soit $t' = 1 + t^2$.

Q 15. Pour $x \in I$, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)^2 \\ &= 1 + x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} (x^2)^n \right)^2 \\ &= 1 + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\alpha_{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} \right) (x^2)^n \\ &\quad \text{par un produit de Cauchy} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{2k+1} \alpha_{2k+1} \alpha_{2n-2k+1} \right) x^{2(n+1)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \alpha_{2k+1} \alpha_{2n-2k-1} \right) x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} \right) x^{2n} \end{aligned}$$

(en terminant le calcul par un décalage d'indice dans la somme extérieure, puis un dans la somme intérieure). Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation

$$\alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$

II. Équivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zéta

Q 16. Posons $u_n(s) = \frac{1}{n^s}$ pour $s \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Chaque fonction u_n est continue et, si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans $]1, +\infty[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall s \in S \quad |u_n(s)| = u_n(s) \leq u_n(a).$$

Comme la série majorante $\sum_{n \geq 1} u_n(a)$ est convergente (série de Riemann avec $a > 1$), on a prouvé la convergence normale sur S (donc sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$) de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$. La fonction somme ζ est alors continue sur $]1, +\infty[$.

Q 17. Si on fixe $s \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\forall n \geq 2 \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^s}.$$

En sommant ces inégalités pour n de 2 à l'infini (les séries et les intégrales étant toutes convergentes), par la relation de Chasles, on obtient

$$\frac{1}{2^{s-1}(s-1)} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}.$$

En ajoutant le premier terme 1, on a l'encadrement

$$\forall s \in]1, +\infty[\quad 1 + \frac{1}{2^{s-1}(s-1)} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Comme $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{s-1}(s-1)}\right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)$, par encadrement, on a $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$.

Q 18. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on a, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \frac{1}{2^s} \zeta(s) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s}.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s) \zeta(s), \text{ avec } C(s) = 1 - \frac{1}{2^s}.$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Q 19. Pour $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
2x I_n(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \cos(2xt)) (\cos t)^n dt \\
&= \left[\sin(2xt) (\cos t)^n \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2xt) \sin(t) (\cos t)^{n-1} dt .
\end{aligned}$$

Le terme entre crochets étant nul, une deuxième intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
4x^2 I_n(x) &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \sin(2xt)) (\sin(t) (\cos t)^{n-1}) dt \\
&= n \left(\left[-\cos(2xt) \sin(t) (\cos t)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2xt) ((\cos t)^n - (n-1) (\sin t)^2 (\cos t)^{n-2}) dt \right) .
\end{aligned}$$

Le terme entre crochets étant de nouveau nul, avec $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a ainsi la relation

$$4x^2 I_n(x) = n I_n(x) - n(n-1) (I_{n-2}(x) - I_n(x)) ,$$

que l'on peut réécrire $(n^2 - 4x^2) I_n(x) = n(n-1) I_{n-2}(x)$, ou encore

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) .$$

Évaluée pour $x = 0$, cette relation donne $\frac{n-1}{n} = \frac{I_n(0)}{I_{n-2}(0)}$. En réinjectant, on obtient

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)} .$$

Q 20. En considérant (convention standard) qu'un produit de zéro facteur vaut 1, la relation à démontrer est vraie pour tout n entier naturel.

En effet, elle est vraie pour $n = 0$ puisque $I_0(x) = \frac{\sin(\pi x)}{2x}$ pour $x \neq 0$ et $I_0(0) = \frac{\pi}{2}$, donc $\pi x \frac{I_0(x)}{I_0(0)} = \sin(\pi x)$.

De la deuxième relation prouvée en **Q 19.**, on déduit par ailleurs que le second membre de l'égalité à démontrer en **Q 20.** ne dépend pas de l'entier naturel n . Cette égalité étant vraie pour $n = 0$, elle est alors vraie pour tout n .

Q 21. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'égalité à démontrer est une erreur d'énoncé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, on peut écrire

$$\cos(\pi x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2 \sin(\pi x)} = \frac{1}{2} \frac{2\pi x \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right)}{\pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{4x^2}{(2k)^2}\right)} ,$$

soit, en examinant ce qu'il reste après simplification des deux produits,

$$\cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

II.C - Un autre développement de tangente

Q 22. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(2t-1)^s}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$, on a, comme en **Q 17.**,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{dt}{(2t-1)^s} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{(2t-1)^s} = \frac{1}{2(s-1)(2n-1)^{s-1}}.$$

Q 23. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$, posons $u_p(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$.

Notons que $u_p(x) = 2^{2p+1} x^{2p-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2p}}$, donc $u_p(x)$ est, à un facteur près, le reste d'ordre n d'une série convergente (car $2p > 1$), et $u_p(x)$ existe bien. La majoration de **Q 22.**, suivie d'une majoration assez brutale mais ici suffisante, donne ensuite

$$0 \leq u_p(x) \leq \frac{2^{2p} x^{2p-1}}{(2p-1)(2n-1)^{2p-1}} \leq 2^{2p} x^{2p-1} = 2(2x)^{2p-1},$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison $(2x)^2 = 4x^2$, avec ici $|4x^2| < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$ converge, ce qui garantit la

bonne définition de la fonction S_n sur J .

Q 24. En reprenant de façon un peu plus fine les majorations, on a en fait, pour $x \in J \setminus \{0\}$,

$$0 \leq u_p(x) \leq \frac{2^{2p} x^{2p-1}}{(2p-1)(2n-1)^{2p-1}} \leq 2 \left(\frac{2x}{2n-1} \right)^{2p-1} = \frac{2n-1}{x} \left(\frac{4x^2}{(2n-1)^2} \right)^p,$$

$$\text{donc } 0 \leq S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} u_p(x) \leq \frac{2n-1}{x} \frac{\frac{4x^2}{(2n-1)^2}}{1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}} = \frac{\frac{4x}{2n-1}}{1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0$, le résultat étant trivial pour $x = 0$.

Q 25. Les facteurs de **Q 21.** étant tous strictement positifs, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$,

$$\ln(\cos(\pi x)) = \ln(I_{4n}(2x)) - \ln(I_{2n}(x)) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right) + K_n,$$

où $K_n = \ln(I_{2n}(0)) - \ln(I_{4n}(0))$ est une constante. En dérivant, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$,

$$\pi \tan(\pi x) = -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^n \frac{\frac{8x}{(2k-1)^2}}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

Remarque. Les fonctions I_{2n} sont dérivables sur J (et même sur $\mathbb{R}$, on le retrouvera en **Q 28.**) par exemple puisque $I_0(x) = \frac{\pi}{2} \text{sinc}(\pi x)$ où sinc est la fonction sinus cardinal, et ensuite la relation obtenue en **Q 19.** permet de le prouver par récurrence sur n .

Q 26. On reconnaît, dans le dernier terme de la somme précédente, une somme géométrique: pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in J \setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\frac{8x}{(2k-1)^2}}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{4x^2}{(2k-1)^2} \right)^p \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right),$$

l'interversion des sommations étant permise puisque l'une des deux sommes est finie. En ajoutant $S_n(x)$ aux deux membres de la relation de **Q 25.**, on obtient alors

$$\begin{aligned} \pi \tan(\pi x) + S_n(x) &= -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right) \\ &= -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(2^{2p+1} x^{2p-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2p}} \right) \\ &= -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(2^{2p+1} x^{2p-1} \left(1 - \frac{1}{2^{2p}} \right) \zeta(2p) \right) \end{aligned}$$

d'après **Q 18.** Finalement, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$, cela donne

$$\pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2 I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2 (2^{2p} - 1) \zeta(2p) x^{2p-1}.$$

Q 27. L'étude de la fonction $t \mapsto \sin(t) - t \cos(t)$ est laissée au vaillant lecteur.

Q 28. En appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on montre que, pour tout n , la fonction I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $I'_n(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin(2xt) (\cos t)^n dt$. En effet, en posant $v(x, t) = \cos(2xt) (\cos t)^n$, l'application partielle $x \mapsto v(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = -2t \sin(2xt) (\cos t)^n$, et donc la domination $\left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2t$ avec $t \mapsto 2t$ intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avec l'inégalité de **Q 27.**, on obtient, pour $x \in [0, 1]$ (cette condition garantit que le facteur $\sin(2xt)$ reste positif),

$$0 \leq -I'_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 (t \cos t) \sin(2xt) (\cos t)^{n-1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(t) \sin(2xt) (\cos t)^{n-1} dt = J_n(x),$$

puis une intégration par parties donne

$$J_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin(t) (\cos t)^{n-1} \right) \left(\sin(2xt) \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{2}{n} (\cos t)^n \sin(2xt) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4x}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2xt) (\cos t)^n dt \\
&= \frac{4x}{n} I_n(x),
\end{aligned}$$

et on a bien la majoration demandée. Donc $\left| \frac{I'_n(x)}{I_n(x)} \right| \leq \frac{4x}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)} = 0$.

Q 29. Soit $x \in J$. En faisant tendre n vers l'infini dans **Q 26.**, grâce à **Q 24.** et **Q 28.**, il vient

$$\pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1) \zeta(2p) x^{2p-1}.$$

II.D - Un équivalent de α_{2n+1}

Q 30. Par un changement de variable linéaire (remplacer πx par x), et par imparité, on déduit que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ avec

$$\tan(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1) \zeta(2p) \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(2^{2n+2} - 1) \zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}} x^{2n+1}.$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier avec celui obtenu en **Q 12.**, d'où l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2} - 1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

Q 31. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$, on a $\alpha_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2} \times (2n+1)!$ On peut remplacer la factorielle par un équivalent avec la formule de Stirling, mais je ne pense pas que cela présente d'intérêt.

III. Permutations alternantes

III.A - Dénombrement des permutations alternantes

Q 32. Pour $n = 2$, il y a une seule permutation alternante montante (**PAM**) qui est $(1, 2) = \text{Id}$.

Pour $n = 3$, il y en a deux qui sont $(1, 3, 2)$ et $(2, 3, 1)$.

Pour $n = 4$, il y en a cinq qui sont $(1, 3, 2, 4)$, $(1, 4, 2, 3)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(2, 4, 1, 3)$ et $(3, 4, 1, 2)$.

Ainsi, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$ et $\beta_4 = 5$.

Q 33. L'application $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (n+1-\alpha_1, \dots, n+1-\alpha_n)$ réalise une bijection entre les **PAM** de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et les **PAD** (permutations alternantes descendantes).

Q 34. Notons $A = \{m_1, \dots, m_k\}$ avec $m_1 < m_2 < \dots < m_k$, autrement dit cette écriture est l'énumération strictement croissante de la partie A (la numérotation commençant à 1). Alors l'application $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mapsto (m_{\alpha_1}, \dots, m_{\alpha_k})$, conservant l'ordre des k -uplets, réalise une bijection entre l'ensemble des **PAM** de l'intervalle $\llbracket 1, k \rrbracket$ et l'ensemble des listes alternantes montantes d'éléments de A . Le nombre de telles listes est alors β_k .

Q 35. Il y a autant de **PAD** que de **PAM** de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, donc le nombre de permutations alternantes est $2\beta_{n+1}$. On a donc $2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \gamma_{n+1}^{(k)}$ en notant $\gamma_{n+1}^{(k)}$ le nombre de permutations

alternantes de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dans lesquelles l'élément $n+1$ se trouve en $k+1$ -ème position. Notons qu'une telle permutation s'écrit $(\sigma(1), \dots, \sigma(k), n+1, \sigma(k+2), \dots, \sigma(n+1))$ et, comme $\sigma(k) < n+1 < \sigma(k+2)$, elle est nécessairement montante si k est impair et descendante si k est pair. Pour construire une telle permutation alternante, une fois choisi l'entier k , il reste à choisir une partie A de cardinal k de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ -il y a pour cela $\binom{n}{k}$ choix possibles-, puis à choisir une liste alternante des éléments de A , notée $(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$, qui soit montante si k est impair et descendante si k est pair -dans les deux cas, il y a β_k possibilités- et enfin une liste alternante (nécessairement montante) notée $(\sigma(k+2), \dots, \sigma(n+1))$ des éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$ -il y a β_{n-k} choix possibles. Au final, $\gamma_{n+1}^{(k)} = \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}.$$

Q 36. Les suites (α_n) et (β_n) vérifient la même initialisation (rangs 0 et 1) et la même relation de récurrence forte d'après **Q 5.**, donc $\beta_n = \alpha_n$ pour tout n .

III.B - Permutations aléatoires

Q 37. On a $p_n = \frac{\beta_n}{\text{Card}(\Omega_n)} = \frac{\beta_n}{n!} = \frac{\alpha_n}{n!}$. On sait (**Q 7.**) que la série entière $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence strictement plus grand que 1, la série numérique $\sum \frac{\alpha_n}{n!}$ est donc convergente, donc son terme général tend vers 0, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$.

De **Q 30.**, on tire $p_{2n+1} = \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2(2^{2n+2} - 1)}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \times \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2}$.

Q 38. L'événement $\{M_n > i\}$ est constitué des permutations $\sigma \in \Omega_n$ telles que la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$ soit alternante montante. Dénombrons ces permutations: on doit choisir l'ensemble $\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}$ -il y a pour cela $\binom{n}{i}$ choix possibles-, puis choisir une liste alternante montante des éléments de cet ensemble -il y a β_i possibilités- et enfin choisir une permutation quelconque des $n-i$ autres éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ -il y en a $(n-i)!$. Ainsi, $\text{Card}(\{M_n > i\}) = \binom{n}{i} \beta_i (n-i)!$ Enfin,

$$\mathbb{P}(M_n > i) = \frac{\text{Card}(\{M_n > i\})}{\text{Card}(\Omega_n)} = \binom{n}{i} \beta_i \frac{(n-i)!}{n!} = \frac{\beta_i}{i!} = p_i.$$

Q 39. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}(M_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k (\mathbb{P}(M_n > k-1) - \mathbb{P}(M_n > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1) p_k - \sum_{k=2}^n k p_k = 2 p_1 + \sum_{k=2}^n p_k = \sum_{k=0}^n p_k. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!} = g(1) = f(1) = \frac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}.$$

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet de cette année propose de démontrer des résultats classiques sur les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs et ses liens avec le développement en série entière de la fonction tangente. La question **Q30** donne un résultat complet sur les $\zeta(2n)$ — les $\zeta(2n+1)$ étant encore aujourd'hui le sujet de nombreuses conjectures. Enfin, une relation avec un problème de dénombrement (suites alternantes d'entiers distincts) donne l'occasion de calculer des probabilités. De nombreuses parties importantes du programme d'analyse sont ainsi abordées : intégrales dépendant d'un paramètre, formule de Taylor, séries entières, équations différentielles, intégration par parties, variables aléatoires discrètes.

Outre les connaissances testées, certaines questions demandent un minimum d'imagination tandis que d'autres exigent soin et persévérance dans les calculs.

Analyse globale des résultats

Si on ne discerne pas de lacune particulière dans la formation des candidats, il reste que certains points apparaissent mal maîtrisés dès lors qu'il faut s'écarter des applications les plus communes. Beaucoup d'erreurs semblent simplement provenir d'un défaut de pratique de certains aspects : erreurs dans la manipulation des indices ou des variables, bornes des domaines de définition ou de validité des formules, calculs algébriques sur les fonctions trigonométriques. Cela sera détaillé au niveau de chaque question dans ce qui suit.

C'est surtout dans ce qu'on appelle « la forme » que des progrès importants restent à faire. Trop de candidats répondent aux questions par une série d'égalités sans autre commentaire qu'une phrase de conclusion. Il est au contraire essentiel de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème. Dans ce dernier cas, on doit impérativement donner le numéro de la question invoquée, même si elle est très proche. Cela va bien au-delà d'une simple question de présentation et même au-delà de la seule mention des idées classiques utilisées. Ainsi qu'on peut le voir pour certaines questions du problème de cette année (cf. partie III) la verbalisation d'idées simples mais pas forcément banales est une compétence essentielle.

Sur la présentation strictement matérielle on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés intelligemment choisis, sans parler de l'utilisation d'une encre assez foncée.

Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats moyens à améliorer substantiellement leur prestation.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A – Dérivées successives

Q1. Les candidats gagneraient à simplifier progressivement leurs calculs. La suite du sujet permettait d'orienter la simplification vers une suppression des $\cos x$.

Q2. Confusion fréquente entre $P(\sin x)$ et $P \times \sin x$. On remarque une maladresse à passer de polynômes en $\sin x$ à des polynômes en X .

Q3. Très peu de justifications que les coefficients sont positifs ou nuls, ce qui demandait un calcul explicite des coefficients.

Q5. Il n'est pas vrai que toute assertion dépendant d'un entier se démontre par récurrence ! Il est important de parler ici de formule de Leibniz, sans quoi il n'est pas clair du tout pour le lecteur de deviner la méthode employée.

I.B – Développement en série entière

Q6. Beaucoup d'erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégral. Certains utilisent la positivité de $f^{(n)}$ invoquant le fait que P_n est à coefficients strictement positifs, même s'ils ont négligé ce point auparavant.

Q7. Ici il convient de considérer $\sum_n \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ simplement comme une série et il est crucial qu'elle soit à termes positifs, sans quoi le fait que les sommes partielles sont bornées est à priori sans conséquence. On pourrait bien sûr arguer que cela implique que $(\frac{\alpha_n}{n!} x^n)_n$ est toujours bornée pour $x \in [0, \pi/2[$ et en déduire que la série entière converge sur ce même intervalle ouvert... mais on n'a pas vu cet argument.

Q8. Les formules de dérivation terme à terme et du produit de Cauchy sont rarement justifiées.

Q9. Ne pas oublier de considérer les conditions initiales. Notons que le théorème de Cauchy linéaire (le seul au programme) ne s'applique pas ici ($y' = F(y)$ avec F non linéaire).

Q10. Le fait que f n'a pas de limite finie en $\pi/2$ ne prouve rien à priori sur la convergence de la série. La bonne approche consistait à raisonner par l'absurde.

I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q11. Une question généralement bien traitée. Des confusions toutefois chez certains candidats qui y voient une question sur les séries entières ou ignorent le sens de fonctions « paires » et « impaires ».

Q12. Idéalement, il faudrait justifier pourquoi la partie paire/impaire d'une fonction développable en série entière est donnée par la somme des termes pairs/impairs de son développement. On pouvait d'ailleurs calculer $f(x) \pm f(-x)$ et simplifier pour obtenir les formules attendues.

Q13. Le taux d'échec à cette question a été une grande surprise pour les correcteurs. Les candidats font preuve d'une grande maladresse pour interpréter la formule qu'ils viennent de démontrer et oublient qu'on ne leur demande qu'une valeur en 0. De nombreuses confusions d'indice, le même entier étant appelé indifféremment n ou $2n + 1$ dans la même égalité.

Q15. Ici il est important d'expliquer ce que l'on fait, calculer ne suffit pas. Un raisonnement expéditif « par analogie avec **Q5** » n'était certes pas suffisant, mais il était bienvenu d'alléger les calculs en expliquant la similarité avec ceux de **Q5**.

II Équivalent de α_{2n+1}

II.A – La fonction zêta

Q16. Le théorème de continuité des séries de fonctions est bien connu des candidats. Attention à la convergence uniforme, seulement sur tout segment ici, ce qui n'implique pas la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ mais suffit pour la continuité. Un nombre appréciable de candidats rappellent le caractère local de la continuité.

Q17. Bien traitée, parfois accompagnée de dessins très bienvenus. Quelques erreurs récurrentes : inégalités dans le mauvais sens, primitives incorrectes, oubli de passer à la limite.

Q18. La majorité des copies ont tenté d'extraire $C(s)$ par inversion du produit de Cauchy ; la séparation en pair/impair ne pose pas de problème de fond ici (série à termes positifs), mais cette étape mérite tout

de même une justification. Erreur fréquente : ζ n'est pas une somme de série entière, en tout cas pas sous la forme donnée.

II.B – Une formule pour la fonction cosinus

Q19. Le cas des intégrales de Wallis semble inspirer les candidats, qui posent généralement les bonnes intégrations par parties. La seconde nécessite un soin particulier sur les signes et les facteurs x et $1/n$. Il était possible d'éviter de traiter séparément le cas $x \neq 0$, en intégrant $x^2 I_{n-2}$ par exemple, ou en justifiant la continuité en $x = 0$; la plupart des copies n'ont pas vu cet écueil.

Q20. Le « télescopage » aurait mérité une rédaction plus soignée, la formule étant fournie de toute façon. Erreur fréquente dans le calcul de $I_0(x) : \sin(\pi x)/\pi$ au lieu de $\sin(\pi x)/2x$ (confusion entre la variable d'intégration t et le paramètre x).

Q21. Question d'un abord difficile, contournée par la plupart des candidats.

II.C – Un autre développement de tangente

Q22. Question où on reprend avec succès la méthode de **Q17**.

Q23. Question difficile car légèrement différente des questions classiques sur les séries. La positivité des termes pouvait simplifier les considérations mais cela a été peu vu.

Q24. Erreur très fréquente : interversion somme-limite non justifiée.

Q25. Pas de difficulté notable mais un manque de soin dans la rédaction (quantificateurs, simplifications hâtives, signes, emploi des questions précédentes), alors que la formule est donnée.

Q26. Très peu abordée.

Q27. Question facile mais parfois bâclée.

Q28. La plupart des copies qui abordent cette question se limitent à déduire le second point du premier.

Q29. La formule étant donnée, il est dommage que les candidats ne justifient que très peu (voire pas) l'emploi des questions précédentes, en particulier quand il s'agit de passer de x à $2x$ dans les formules.

II.D – Un équivalent de α_{2n+1}

Q30. Un beau résultat hélas peu abordé.

Q31. Presque aucun candidat n'essaie de simplifier l'équivalent de Stirling appliqué à $(2n + 1)!$.

III Permutations alternantes

III.A – Dénombrement des permutations alternantes

Q32. Beaucoup ne trouvent que 4 permutations alternantes montantes pour $n = 4$.

Q33. La solution générale consistant à remplacer a_i par $n - a_i + 1$ n'a été aperçue que dans les toutes meilleures copies. Beaucoup de candidats pensent plutôt à inverser l'ordre des a_i , certains réalisant alors que cela ne fonctionne que pour n pair. Pour n impair, le processus qui consiste à envoyer une permutation alternante $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sur celle des deux permutations $(a_n, a_1, \dots, a_{n-1})$ ou $(a_2, \dots, a_n, a_1)$ qui est aussi alternante est effectivement une involution qui échange les descendantes et les montantes mais aucun candidat ne le justifie.

Q34. Il s'agissait de réindexer dans l'ordre strictement croissant de valeurs ; souvent les copies se contentent d'étiqueter arbitrairement les éléments.

Q35. Rarement abordée mais quelques bons arguments. Les candidats ont des difficultés pour décrire des opérations finalement peu classiques, la justification du facteur 2 étant particulièrement malaisée.

Q36. La récurrence (forte !) était simple à rédiger, raison de plus pour ne pas l'expédier d'un « par une récurrence immédiate ». Importance ici de bien citer les questions invoquées.

III.B - Permutations aléatoires

Questions peu abordées.

Conclusion

Outre les recommandations déjà données en introduction, on ne peut que conseiller de lire chaque partie du sujet avant d'essayer de résoudre les questions. La vue d'ensemble ainsi obtenue est souvent une bonne source d'inspiration.

Les résultats de cette année montrent une dispersion marquée avec un quart supérieur assez étalé culminant en quelques très bonnes copies.

En conclusion, sur un énoncé qui testait des aspects variés du programme de PC, on ne relève pas de lacune particulièrement récurrente. C'est plutôt le niveau de familiarité, ou simplement de pratique, des théorèmes et des méthodes qui semble faire la différence entre les candidats.