e3a 2016 - PSI 1
Un corrigé

Exercice 1

1. (a) La série proposée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et donc convergente. On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$$

(b) Si $x > 1$ alors $nx^{n-1} \to +\infty$ ce qui montre que le rayon de convergence est ≤ 1.
Si $x \in [0,1[$, $nx^{n-1} \to 0$ (croissances comparées) ce qui montre que le rayon de convergence est ≥ 1.
Le rayon de convergence est donc égal à 1.

(c) On a

$$b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Comme $1/2 \in]-1,1[$, la question précédente montre que $\sum(b_n)$ converge. La série entière de la question précédente est la série entière dérivée de $\sum_{n\geq 0} x^n$. Comme on peut dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, on en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2$$

2. (a) $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x > 1,\ f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2} \leq 0$$

f est donc décroissante sur $]1,+\infty[$ (on aurait aussi pu montrer que si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ en utilisant la croissance de ln et la décroissance du passage à l'inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$).
On en déduit immédiatement que $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Elle est de limite nulle par théorèmes d'opération.

(b) f étant décroissante, on peut utiliser une comparaion série-intégrale. On a

$$\forall k \geq 3,\ \int_k^{k+1} f(t)\ dt \leq a_k = f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt$$

En sommant (et comme $a_1 = 0$) la relation de Chasles donne

$$\forall n \geq 2,\ a_2 + \int_3^{n+1} f(t)\ dt \leq A_n \leq a_2 + \int_2^n f(t)\ dt$$

Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ et on a donc

$$\forall n \geq 2,\ a_2 + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq A_n$$

La minorant étant de limite $+\infty$, il en est de même de A_n et $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

(c) $na_n = \frac{1}{\ln(n)}$ si $n \geq 2$. On a donc directement

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$$

(d) On a

$$b_n = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$$

On écrit que

$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1) &= (n+1)\left(\ln(n) + \ln(1+1/n)\right)\\ &= (n+1)\ln(n) + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= n\ln(n) + \ln(n) + o(\ln(n))\end{aligned}$$

Ainsi, $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim \ln(n)$ et donc

$$b_n \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$$

$\sum(b_n)$ est ainsi une série divergente (positive et équivalente à une série divergente).

3. (a) Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de (a_k), le plus petit d'entre eux est a_{2n}. On a donc

$$na_{2n} \leq u_n$$

(b) On a $u_n = A_{2n} - A_n$ et comme (A_n) converge (suite des sommes partielles de la série convergente $\sum(a_n)$) on en déduit que $u_n \to 0$. L'encadrement $0 \leq na_{2n} \leq u_n$ prouve alors que

$$\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$$

(c) Posons $c_n = na_n$. On a $c_{2n} = 2(na_{2n}) \to 0$. De plus

$$0 \leq c_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$$

Comme $\sum(a_k)$ converge, $a_k \to 0$. Le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement, $c_{2n+1} \to 0$. Du résultat sur les extraites de rang pair et impair, on déduit que $c_n \to 0$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$$

(d) On revient aux sommes partielles (puisque l'on est dans une situation théorique).

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)a_k\\ &= a_1 + \sum_{k=2}^{n}(k-(k-1))a_k + na_{n+1}\\ &= A_n + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1}\end{aligned}$$

Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand $n \to +\infty$, (B_n) converge et donc $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

(e) Un passage à la limite dans l'identité précédente donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4. (a) Reprenons l'identité de la question précédente (on s'est donné $1 \leq m \leq n$)

$$B_n = A_n + na_{n+1} = A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k + na_{n+1}$$

Dans la somme, il y a $n-m$ termes tous plus grand que a_n et donc aussi que a_{n+1}. On en déduit que

$$B_n \geq A_m + (n-m)a_{n+1} + na_{n+1} = A_m - ma_{n+1}$$

(b) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente (les limites existent) :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq A_m$$

Ceci montre que (A_m) est une suite bornée. Comme elle croît (car les a_k sont ≥ 0), elle converge. Ainsi, $\sum(a_k)$ converge.

(c) On est alors ramenés à la partie précédente et on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Exercice 2

1. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Supposons pour cela que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k = 0$. On a alors

$$\forall x \geq 0,\ 0 = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = e^{-x} Q(x)$$

e^{-x} étant non nul, Q est une fonction polynomiale nulle sur $\mathbb{R}^+$ et donc nulle (puisque Q possède une infinité de racines) ce qui entraîne la nullité des α_i.
$\mathcal{B}$ est libre et engendre E (par définition) et c'est donc une base de E. La dimension d'un espace étant le cardinal de l'une de ses bases, on a

$$\dim(E) = N + 1$$

2. (a) La linéarité de Δ est immédiate (linéarité de la dérivation). En outre

$$\Delta(e_0) = -e_0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [|0, N|],\ \Delta(e_j) = je_{j-1} - e_j$$

Les éléments d'une base de E étant envoyés dans E, Δ est finalement un endomorphisme de E.

(b) Les calculs précédents montrent que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant inversible (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls), $\Delta \in GL(E)$.

(c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale et ainsi

$$\mathrm{Sp}(\Delta) = \{-1\}$$

$A+I_{N+1}$ est de rang N (les N première lignes sont indépendantes et la dernière nulle) donc $E_\Delta(-1)$ est de dimension 1 par théorème du rang. Comme cet espace contient $e_0 \neq 0$, on a

$$E_0(\Delta) = \mathrm{Vect}(e_0)$$

Δ n'est donc pas diagonalisable car $N \geq 1$ (et la somme des dimension des sous-espaces propres est $< N+1 = \dim(E)$).

3. On a $w_n = (x+n)^k e^{-(x+n)} \sim e^{-x} n^k e^{-n} = o(1/n^2)$ par croissances comparées. Ainsi, $\sum(w_n)$ est absolument convergente (et donc convergente).

4. (a) Une somme (finie) de séries convergentes est convergente et le passage à la somme est linéaire dans l'espace des suites de série associée convergente.

(b) Comme $f \in E$, il existe des scalaires α_k tels que $f = \sum_{k=0}^N \alpha_k e_k$. $f(n+x)$ apparaît alors comme la somme des termes généraux de séries convergentes. La question précédente montre que $\sum(f(n+x))$ converge et que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(\alpha_k \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n)\right) = \sum_{k=0}^{N} \left(\alpha_k e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n}\right)$$

(c) $n^j e^{-n} = o(1/n^2)$ (par croissances comparées) et c'est le terme général d'une série absolument convergente.

(d) k étant fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n}\right)$$

On peut là encore intervertir (car une somme est finie) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k}{j} x^{k-j} A_j\right)$$

On en déduit (en gardant les notations de la question précédente)

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k e^{-x} \binom{k}{j} x^{k-j} A_j$$

C'est bien une expression en fonction de A_j mais aussi des α_k qui, eux, ne sont pas dans l'énoncé. Qu'attend-on ?

(e) On veut exprimer F à l'aide des e_i. On a

$$F = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}$$

Comme $0 \leq k-j \leq N$, on a $F \in E$ (combinaison linéaire de $e_0, \dots, e_N$). Ainsi Φ va de E dans E. Sa linéarité est immédiate ($\Phi(f_1 + \lambda f_2) = \Phi(f_1) + \lambda \Phi(f_2)$) et donc $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

5. On applique ce qui précède avec $F = e_i$ (tous les α_k nuls sauf $\alpha_i = 1$) :

$$\Phi(e_i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} A_j e_{i-j}$$

On obtient donc pour Φ dans la base $\mathcal{B}$ une matrice triangulaire comme ci-dessous

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0}A_0 & \binom{1}{1}A_1 & \binom{2}{2}A_2 & \dots & \binom{N}{N}A_N \\ 0 & \binom{1}{0}A_0 & \binom{2}{1}A_1 & \dots & \binom{N}{N-1}A_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{0}A_0 & \dots & \binom{N}{N-2}A_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{N}{0}A_0 \end{pmatrix}$$

On a donc une unique valeur propre A_0. Comme la matrice n'est pas diagonale (et possède une unique valeur propre), elle n'est pas diagonalisable. Ainsi, Φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

1. Programmes mystères

1. On a `P0(5)=True` et `P1(5)=True` puis `P0(9)=True` et `P1(5)=False`
   `P0(N)` pour $\mathtt{N} \geq 3$ teste si `N` est pair. Il renvoie `False` si c'est le cas et `True` sinon.
   `P1(N)` teste si `N` est premier (en renvoyan `True` si c'est le cas).

2. `P2(N)` renvoie la liste de entiers premiers inférieurs à `N` qui sont de la forme $1 + k^2$ pour une un bon entier k. On a ainsi

   `P2(127)=[2,5,17,37,101]`

   On teste qui parmi $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 11^2$ est premier (au delà, on est après 127).

3. On gère un compteur que l'on incrémente à partir de la valeur $N + 1$ tant que l'on ne tombe pas sur un nombre premier.

```
def nextPrime(N):
    k=N+1
    while not P1(k):
        k=k+1
    return(k)
```

4. (a) Je gère deux variables `p` et `q` qui vont successivement prendre les valeurs des entiers premiers successifs (plus grands que `N`). On s'arrête quand il sont distants de 2.

```
def jumeau(N):
    p=nextPrime(N)
    q=nextPrime(p)
    while q!=p+2:
        p,q=q,nextPrime(q)
    return([p,q])
```

   On peut aussi tester pour les nombre premiers $\mathtt{p} > \mathtt{N}$ si $\mathtt{p} + 2$ est premier. Cela fait utiliser `P1`.

```
def jumeau(N):
    p=nextPrime(N)
    while not(P1(p+2)):
        p=nextPrime(p)
    return([p,p+2])
```

(b) Je gère deux variables `p` et `q` qui vont successivement prendre les valeurs des entiers premiers successifs et une liste `l` pour stocker les paires de jumeaux. Tant que $\mathtt{q} \leq \mathtt{N}$, on teste si $\mathtt{p} + 2 = \mathtt{q}$ pour savoir si on l'ajoute à la liste puis on passe au couple suivant.

```
def lesJumeaux(N):
    p=2
    q=nextPrime(p)
    l=[]
    while (q<=N):
        if q==p+2:l.append([p,q])
        p,q=q,nextPrime(q)
    return(l)
```

2. Fonction récursive

1. Dans l'appel `M(101)` on renvoie directement 91.
2. Si $\mathtt{N} > 100$ on est de même dans un cas de base de la fonction et on renvoie $\mathtt{N} - 10$.
3. Dans l'appel `M(100)`, on calcule `M(111)` qui vaut 101 avec lequel on rappelle `M` pour obtenir 91. Dans l'appel `M(99)`, on calcule `M(110)` qui vaut 100 avec lequel on rappelle `M` pour obtenir 91. Dans l'appel `M(98)`, on calcule `M(109)` qui vaut 99 avec lequel on rappelle `M` pour obtenir 91.
4. On peut penser que pour tout $\mathtt{N} \leq 100$ on a `M(N)` qui vaut 91. On le prouve par récurrence descendante sur `N`.
   - Initialisation : c'est vrai si $\mathtt{N} = 100$.
   - Hérédité soit $\mathtt{N} \leq 100$ tel que le résultat soit vrai du rang 100 jusqu'au au rang `N`. L'appel `M(N-1)` déclenche celui de `M(N+10)`. Si $\mathtt{N} + \mathtt{10} > 100$ cet appel renvoie `N` et par hypothèse de récurrence, le second appel à `M` donne 91. Sinon $\mathtt{N} + \mathtt{10}$ est entre `N` et 100 et par hypothèse de récurrence l'appel donne 91 et le second appel à `M` (avec 91) donne 91.

Exercice 4

1. Préliminaires

1. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$; on a alors $x \in E$ et donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$. $\mathrm{Im}(u)$ est donc stable par u.
2. (a) On a
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$$
Comme (e_3, e_4) est libre, cet espace est de dimension 2 et
$$\mathrm{rg}(u) = 2$$
Par théorème du rang, $\ker(u)$ est de dimension 2. Comme il contient e_3 et e_4 qui sont indépendants, on a
$$\ker(u) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$$
Comme $e_3 \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, les deux sous-espaces ne sont pas en somme directe et donc pas supplémentaires.

(b) La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme elle est triangulaire, on a directement ses valeurs propres sur la diagonale et

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$$

Comme $u \neq 0$, u n'est alors pas diagonalisable (un seul sous-espace propre de dimension $2 < 4$).

(c) On a immédiatement

$$\mathrm{Mat}_{(e_3,e_4)}(u|_{\mathrm{Im}(u)}) = 0$$

3. Le cours nous indique que la dimension du sous-espace propre est inférieure à la multiplicité de la valeur propre (comme racine du polynôme caractéristique).

4. S'il y a n valeurs propres, le polynôme caractéristique possède n racines. Comme il est de degré n, la somme des multiplicités des n racines est $\leq n$. Il faut donc que chaque multiplicité soit égale à 1.

2. L'exercice

1. Le déterminant étant invariant par transposition, M et ${}^tM$ ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Comme il y a n valeurs propres distinctes et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, M et ${}^tM$ sont diagonalisables et ont des sous-espaces propres de dimension 1.

2. Soient $i, \in [|1, n|]$; on a

$$\lambda_i {}^tV_iW_j = {}^t(MV_i)W_j = {}^tV_i({}^tMW_j) = \lambda_j {}^tV_iW_j$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on en déduit que

$${}^tV_iW_j = 0$$

3. Soit $i \in [|1, n|]$; on vient de voir que V_i est orthogonal à tous les W_j pour $j \neq i$. Si, par l'absurde, il était orthogonal à W_i, il serait nul puisqu'orthogonal à tout élément d'une base de $\mathbb{R}^n$ ce qui est faux ($V_i \neq 0$). On a donc

$${}^tV_iW_i \neq 0$$

4. A étant triangulaire, sa diagonale donne le spectre et

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$$

A possède donc deux sous-espaces propres qui sont des droites. On vérifie que $V_1 = (1, 0)$ et $V_2 = (1, 1)$ sont propres pour A associés respectivement à 1 et 2. De même $W_1 = (1, -1)$ et $W_2 = (0, 1)$ sont propres pour ${}^tA$ associés à 1 et 2. On en déduit que

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_1 + 2B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $C_k = V_k{}^t W_k$ est de rang ≤ 1 comme produit de deux matrices de rang 1. De plus, cette matrice n'est pas nulle car $C_k V_k = V_k{}^t W_k V_k = (W_k|V_k)V_k \neq 0$. C'est donc une matrice de rang 1 et donc (on multiplie par un scalaire non nul et cela ne change pas le rang)

$$\mathrm{rg}(B_k) = 1$$

On a

$$B_k^2 = \frac{1}{(V_k|W_k)^2} V_k({}^t W_k V_k){}^t W_k = \frac{1}{(V_k|W_k)} V_k{}^t W_k = B_k$$

$X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme qui annule B_k. Comme il est scindé à racines simples, B_k est diagonalisable.

6. On a vu en question précédente que $B_k V_k = V_k$ et on a aussi $B_k V_i = 0$ si $i \neq k$ car $(W_k|V_i) = 0$ dans ce cas. On en déduit que $\forall i,\ PV_i = V_i$ et $QV_i = \lambda_i V_i$. L'endomorphisme canoniquement associé à P agit comme l'identité sur la base des (V_i) et celui associé à Q agit comme celui associé à M. Un endomorphisme étant caractérisé par son action sur une base, on a

$$P = I_n \quad \text{et} \quad Q = M$$

7. De même, G_r et M^r ont même action sur la base des V_i et donc

$$G_r = M^r$$

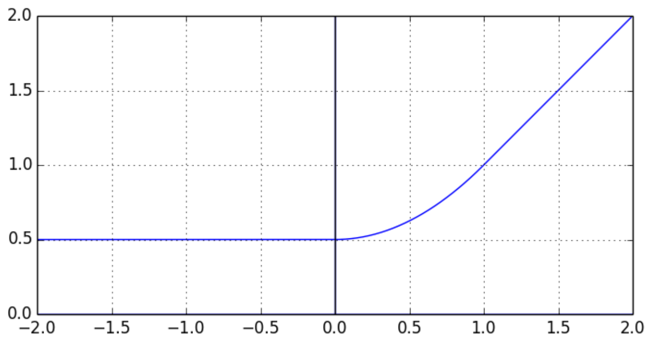
Exercice 5

1. (a) Le graphe de φ_x ets constitué d'une ligne horizontale d'ordonnée x jusqu'au point d'abscisse x puis coïncide avec la première bissectrice.

   (b) On distingue les cas

   - Si $x \leq 0$, $\Phi(x) = \int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}$.
   - Si $x \in]0,1[$, $\Phi(x) = \int_0^x x\ dt + \int_x^1 t\ dt = \frac{1+x^2}{2}$.
   - Si $x > 1$, $\Phi(x) = \int_0^1 x\ dt = x$

   (c)



2. Si X suit une loi géométrique alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. En particulier, $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 1$ et donc

$$Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega)$$

Les variables X et Y sont donc égales.

3. (a) On a $X(\Omega) = [|0, n|]$ et

$$\forall k \in [|0, n|],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

(b) Comme $Y = \Phi(X)$, on a

$$Y(\Omega) = \Phi([|0, n|]) = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, n \right\}$$

De plus

$$\mathbb{P}(Y = 1/2) = \mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n \text{ et } \forall k \in [|1, n|],\ \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4. (a) On a

$$\mathbb{P}(X = 1/2) = 1 - \mathbb{P}(X = -1) - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{12}$$

(b) On a $Y(\Omega) = \{\Phi(-1), \Phi(0), \Phi(1/2), \Phi(2)\} = \{1/2, 5/8, 2\}$ et

$$\mathbb{P}(Y = 1/2) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Y = 5/8) = \mathbb{P}(X = 1/2) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\frac{5}{8} + \frac{1}{3}2 = \frac{101}{96}$$

(c) Quand X vaut -1, Y vaut $1/2$ et Z vaut $-1/2$. On procède de même pour les trois autres valeurs et on trouve

$$Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$$

$$\mathbb{P}(Z = -1/2) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(Z = 5/16) = \mathbb{P}(X = 1/2) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

(d) Par formule de König-Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

On a vu que $\mathbb{E}(Y) = 101/96$ et de même on a $\mathbb{E}(X) = 3/4$ et $\mathbb{E}(Z) = 269/192$. Ainsi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{235}{384}$$

Pour obtenir le coefficient de corrélation, on doit diviser par le produit des écarts type. On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{399}{256} - \left(\frac{101}{96}\right)^2 = \frac{4163}{9216}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \frac{235}{16652}\sqrt{4163}$$

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Epreuve de quatre exercices
Il y a eu 4425 copies, dont, comme l'an passé, d'excellentes copies, avec une moyenne de 9.59 sur 20 et un écart type de 4.21

L'épreuve était constituée de cinq exercices, de profils très différents, destinés à tester plusieurs compétences et divers types de raisonnements. Les candidats devaient utiliser des connaissances relatives à différentes parties des programmes de mathématiques et d'informatique.

L'ajout de l'algorithmique dans une épreuve de mathématiques a permis de bien classer les candidats. Cependant, trop de candidats n'ont pas bien assimilé le cours de mathématiques et manquent de rigueur dans la rédaction. Par ailleurs, il était demandé aux candidats de répartir équitablement leur travail entre les exercices proposés : le barème en a tenu compte. Il est regrettable de voir une dégradation de la maîtrise de l'orthographe dans les copies.

Le sujet comportait 58 questions ce qui a permis d'évaluer le niveau très hétérogène des candidats. Dans pratiquement toutes les copies, les dernières questions n'ont pas été ou très peu abordées excepté l'exercice d'informatique. Un certain nombre de copies montre une méconnaissance profonde du cours et, à contrario, les candidats qui le maitrisent peuvent ainsi obtenir de très bonnes notes. Nous rappelons par ailleurs que les résultats hors programme ne peuvent servir de justifications : par exemple, l'utilisation des séries de Bertrand.

Quelques recommandations pour les candidats : travailler régulièrement le cours tout au long de l'année, justifier rigoureusement les résultats proposés (les approximations ou « arnaques » sont toujours sévèrement sanctionnées), éviter les fautes d'orthographe, numéroter convenablement les copies et respecter les numéros des questions.

Exercice 1 : analyse sur séries.
L'exercice a été abordé dans presque toutes les copies mais souvent traité avec peu de rigueur, surtout dans la manipulation des inégalités. Les premières questions (applications directes du cours sur séries entières ou suites) ont permis aux candidats sérieux d'avoir des points. Un nombre de candidats plus important que les années passées pense que la série converge dès que le terme général converge vers 0. L'oubli de l'utilisation des valeurs absolues, ou du fait que les termes doivent être positifs pour conclure est trop fréquent hélas.

Exercice 2 : endomorphisme dans un espace de fonctions
Les questions 1 et 2 sont des questions de base en algèbre linéaire (plutôt vues en première année). Leur traitement est très décevant dans beaucoup de copies, à part la construction de la matrice (en 2.2). Pour justifier que l'on a une base, beaucoup ne pense pas à montrer que la famille est libre. D'autres disent que la famille est échelonnée, donc libre, ce qui n'a pas de sens. La justification du fait que Δ soit bijectif est souvent traitée de manière compliquée, l'utilisation du déterminant n'étant pas un réflexe. Les valeurs propres sont trouvées mais les vecteurs propres rarement donnés. A la question 3, la définition de w_n a été mal comprise (produit par $x + n$ au lieu de valeur en $x + n$). Les questions 4.2 et 4.3 ont été globalement bien traitées mais pas du tout la 4.1, où presque tous les théorèmes du programme ont été cités.

Exercice 3 : algorithmique et arithmétique

L'exercice a été abordé par presque tous les candidats mais il n'y a des commentaires des codes que dans très peu de copies. La différence entre P0 et P1 a été comprise dans la moitié des cas. Pour P0, on a pu lire « P0 ne sert à rien » ou « il y a une erreur d'énoncé ». Beaucoup d'étudiants n'ont pas compris qu'un return arrête le programme et utilisent mal « while » avec des conditions souvent peu pertinentes. L'appel de P2(127) n'est réussi que dans la moitié des copies ce qui est dommage car avec un peu de concentration, il était facile de répondre. Il est regrettable que les candidats ne pensent pas à utiliser les programmes précédents et ne soient pas rigoureux dans la gestion des variables utilisées.

Exercice 4 : algèbre linéaire (partie cours) et bilinéaire

Partie cours

Les questions ont globalement été bien traitées, avec les questions 2 très discriminantes. A la question 3, les étudiants ont souvent eu une des deux inégalités mais pas la seconde. Globalement seules les questions 1 et 4 ont été abordées, donc presque personne n'a de points sur les questions un tant soit peu difficiles (2,3,5,6,7). Beaucoup de candidats pensent que si deux matrices ont le même polynôme caractéristique, que si l'une est diagonalisable, alors l'autre l'est automatiquement. Les calculs sur les matrices 2x2 sont relativement bien faits, mais il subsiste dans certaines copies des fautes de calculs inexcusables. Par suite de la longueur de l'épreuve, les candidats ont vite capitulé à la lecture de l'énoncé pour aller plutôt traiter l'exercice 5.

Exercice 5 : probabilités

Le cours a été assez bien restitué et ceux qui traitent les questions jusqu'au 4.3 ont eu facilement des points. Dans la question 1, les candidats oublient souvent de faire les graphes pour $x < 0$ et les schémas ne sont pas toujours soignés (manque d'échelle ou de commentaires). On remarque souvent une confusion entre X(Ω) et Ω et la restitution de formules non explicitées : q dans la loi binomiale, par exemple.

En conclusion, l'épreuve d'exercices permet de balayer le programme de la filière PSI en mathématiques et algorithmique. Elle permet de vérifier les compétences d'adaptabilité des candidats qui doivent mettre en œuvre les compétences acquises au cours des deux années de CPGE

Chaque exercice possède une progressivité propre qui permet de classer efficacement les candidats. Les futurs candidats qui veulent réussir cette épreuve doivent s'y préparer :

- en apprenant à gérer de façon équilibrée leur temps entre les différents exercices,
- en s'appuyant sur des connaissances solides,
- en maitrisant les techniques de calcul élémentaires.