CCINP — PSI* — 2023

Exercice — Fonction de Bessel, intégrales de Wallis

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $W_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur le segment $[0,\pi]$, donc $f(x)$ est bien définie.

Q2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.
Pour tout $t \in [0,\pi]$, la fonction $x \longmapsto \cos(x\sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(x\sin(t))\big) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) \qquad \& \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\cos(x\sin(t))\big) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t))$$

sont continues (p.m.) sur $[0,\pi]$ par rapport à t et dominées par la fonction constante égale à 1, qui est intégrable sur $[0,\pi]$. Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \qquad \& \qquad f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Q3. La fonction définie par $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée et produit de fonctions qui le sont. Elle admet en particulier une dérivée partielle première par rapport à t donnée pour tout (x,t) par

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)).$$

Q4. On déduit des deux questions précédentes que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} xf''(x) + f'(x) + xf(x) &= -\int_0^\pi x\sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi x\cos(x\sin(t)) \\ &= \int_0^\pi \big[x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t = h(x,\pi) - h(x,0) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, f est solution de $(\mathbf{E})\colon\ xy'' + y' + xy = 0$.

Q5. Soit, à supposer qu'elle existe, une série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$. En reportant dans $(\mathbf{E})$, il vient

$$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) + xy(x) &= x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\big[n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2}\big]x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\big[n^2 a_n + a_{n-2}\big]x^{n-1}. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence étant infini, le développement en série entière est unique et l'écriture ci-dessus équivalente à

$$a_1 = 0 \qquad \& \qquad \forall n \geqslant 2\colon\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Q6. En développant le cosinus en série entière, il vient, sous réserve de validité de la permutation série-intégrale,

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!}x^{2n}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{W_n}{(2n)!}\,x^{2n}.$$

Pour justifier l'interversion, on a l'embarras du choix.

• Le plus simple est de noter que, pour $t \in [0, \pi]$ et $x \in \mathbb{R}$, l'on a $|x \sin t| \leqslant |x|$. Or, la série entière définissant cosinus est uniformément convergente sur tout segment donc la série intégrée converge uniformément ce qui, sur un segment, est une condition suffisante d'interversion.

• On peut aussi utiliser le théorème d'interversion en notant que

$$\int_0^\pi \left| (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi x^{2n}}{(2n)!},$$

terme général du DSE convergent de $\pi \operatorname{ch}(x)$.

• À t et x fixés, la suite $\left(\frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right)_n$ est clairement décroissante à partir d'un certain rang, le quotient des termes d'indices respectifs $n+1$ et n valant $\frac{x^2 \sin^2 t}{(2n+1)(2n+2)}$ et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées et majorer le reste

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \leqslant \frac{\sin^{2N}(t) x^{2N}}{(2N)!} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

comme terme général du DSE convergent de $\operatorname{ch}(x \sin t)$. Cela remontre la convergence uniforme de la série.

Q7. La suite obtenue à la question Q5. est unique et donne une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$. Il y a ainsi au plus une solution de (**E**) développable en série entière de coefficient constant fixé. Comme f est bien une solution de (**E**) développable en série entière vérifiant $f(0) = \pi$, c'est la seule.

Q8. Il reste à identifier le DSE de f et la série obtenue à la question Q5. C'est possible sans vérification du fait que le rayon de convergence de la série entière obtenue est non nul, puisque la série entière obtenue à la question Q6 converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc est de rayon de convergence infini. L'identification avec l'expression de a_n en fonction de W_n donne ainsi

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n^2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!^2}\, a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n\, n!^2}\, \pi = (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} \qquad \therefore \qquad W_n = \frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

On aurait pu bien sûr aussi obtenir le rayon directement sur la série obtenue en Q5 : la relation de récurrence donne

$$\forall x > 0\colon \left| \frac{a_{2n} x^{2n}}{a_{2n-2} x^{2n-2}} \right| = \frac{x^2}{4n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La règle de d'Alembert montre que la série ainsi obtenue est de rayon de convergence infini, ce qui valide le calcul effectué à la question Q5 indépendamment du calcul de la question Q6.

Problème 1 — Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I — Un développement en série entière

Q9. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Alors, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1. Son DSE est donné par la formule

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n.$$

Q10. En particulier, pour $\alpha = -1/2$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \times \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n\, n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.\end{aligned}$$

Partie II — Probabilité du retour à l'origine

Q11. Soit $t \in \mathbb{N}^*$. Alors, $Y_t = (X_t + 1)/2$ prend la valeur 1 avec la probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $1 - p$, soit $Y_t \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli). Comme les v.a. $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, les v.a. $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ le sont également (lemme des coalitions) et $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t$ est une somme de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(t)$ donc $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t \sim \mathcal{B}(n, p)$, loi binomiale de paramètres (n, p).

Q12. Par définition de S_n,

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t = \sum_{t=1}^{n} (2Y_t - 1) = 2 \sum_{t=1}^{n} Y_t - n \qquad \therefore \qquad (S_n = 0) = \left(\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2} \right).$$

Une loi binomiale ne prenant que des valeurs entières, il vient

$$u_n = \mathbf{P}(S_n = 0) = \begin{cases} \dbinom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q13. Appliquons la formule de Stirling.

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \big(p(1-p)\big)^n \sim \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \times \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{2n} \times \frac{1}{2\pi n} \times \big(p(1-p)\big)^n = \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

La fonction $p \mapsto 4p(1-p)$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en $p = \dfrac{1}{2}$, où elle vaut 1. On a donc $0 \leqslant u_{2n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, cela valant pour tout $p \in [0, 1]$. La probabilité de se trouver à l'origine à la date $2n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Partie III — Nombre de passages par l'origine

Q14. Par définition, $O_{2j} = \mathbb{1}_{(S_{2j}=0)}$. La variable aléatoire $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} O_{2j}$ dénombre les retours en 0 entre l'instant d'origine et l'instant $2n$. Comme $O_0 = 1$, elle est à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

Q15. D'après la question 12, $\mathbf{P}(O_{2j} = 1) = u_{2j} = \dbinom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(O_{2j} = 1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j.$$

Q16. On suppose que $p \neq 1/2$. En utilisant le calcul fait à la question 10, il vient

$$\lim \mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j} \big(4p(1-p)\big)^j = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)}}$$

en notant que $4p(1-p) < 1$, ce qui valide l'utilisation du DSE. Ainsi, cette limite est finie, ce qui signifie qu'en moyenne, on repasse un nombre fini de fois par l'origine.

Q17. On suppose que $p = 1/2$. Montrons par récurrence simple sur n que $\mathbf{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$. Pour $n = 0$, $T_n = O_0 = 1$ et la formule donne bien $\mathbf{E}(T_0) = 1$. Supposons la formule vraie pour n. Alors,

$$\mathbf{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \left(\frac{4(n+1)^2}{2n+2} + 1 \right) = \frac{2n+3}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1}.$$

On reprend le calcul de la question Q13 en notant que

$$\mathbf{E}(T_n) = (2n+1) u_{2n} \sim \frac{2n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty.$$

On repasse ainsi en moyenne une infinité de fois par l'origine.

Problème 2 — Puissances de matrices, limites de suites matricielles

Partie I — Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q18. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $M(a,b)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Q19. On calcule $M(a,b)V = \big(b + (n-1)a\big)V$.

Q20. On pourrait obtenir directement $P_{1,0}$ par un calcul de déterminant, mais il est plus rapide de remarquer que $M(1,0) + I_n$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1, qui est de rang 1. Comme $M(1,0)$ est de plus diagonalisable (question Q18), cela montre que -1 est valeur propre de $M(1,0)$ de multiplicité exactement $n-1$. Comme $n-1 \neq -1$ est aussi valeur propre de $M(1,0)$ (question Q19), elle est valeur propre simple (la somme des dimensions des espaces propres vaut n) et $P_{0,1} = \big(X-(n-1)\big)(X+1)^{n-1}$.

Q21. On suppose que $a \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{C}$. Par définition du polynôme caractéristique et n-linéarité du déterminant,

$$P_{a,b}(x) = \det\big(xI_n - M(a,b)\big) = \det\big((x-b)I_n - aM_{1,0}\big) = a^n \det\left(\frac{x-b}{a}I_n - M_{1,0}\right) = a^n P_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right) \qquad \therefore$$

$$P_{a,b} = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} = \big(X-b-(n-1)a\big)(X-b+a)^{n-1}.$$

Ainsi, $M(a,b)$ admet deux valeurs propres, $b+(n-1)a$, d'ordre 1, et $b-a$, d'ordre $n-1$.

Q22. Pour $Q_{a,b} = \big(X-(b-a)\big)\big(X-(b+(n-1)a)\big)$, on calcule

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M(a,b)) &= \big(M(a,b)-(b-a)I_n\big)\big(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n\big) \\ &= \big(aM(1,0)+aI_n\big)\big(aM(1,0)-(n-1)aI_n\big) = a^2 Q_{1,0}(M(1,0)). \end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, $Q_{a,b} = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M(a,b))} (X-\lambda)$. En particulier est-ce le cas pour $(a,b)=(1,0)$. Or, $M(1,0)$ est diagonalisable par Q18 et est donc annulé par $Q_{1,0}$. Il s'ensuit que $Q_{a,b}\big(M(a,b)\big) = 0$, que a soit nul ou pas. Si $a \neq 0$, il s'ensuit aussi que $M(a,b)$ est diagonalisable. Si $a=0$, $M(0,b) = bI_n$ est diagonale, donc diagonalisable.

Q23. On suppose que $a \neq 0$. Comme $\deg(Q_{a,b}) = 2$, la division euclidienne donne $X^k = A_k Q_{a,b} + R_k$ avec $R_k = u_k X + v_k$, $(u_k, v_k) \in \mathbb{C}^2$. En affectant à l'indéterminée X les valeurs $b-a$ et $b+(n-1)a$, qui sont les racines de $Q_{a,b}$, il vient $R_k(b-a) = (b-a)^k$ et $R_k(b+(n-1)a) = (b+(n-1)a)^k$. La résolution du système linéaire donne

$$R_k = \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} X + \frac{(b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)}{na}.$$

En substituant cette fois $M(a,b)$ à X, il vient

$$M(a,b)^k = R_k(M(a,b)) = \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} M(a,b) + \frac{(b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)}{na} I_n.$$

Q24. Si $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$, on peut passer à la limite dans l'expression ci-dessus. Il vient $\lim\limits_{k\to\infty} M(a,b)^k = 0$.

Partie II — Limite des puissances d'une matrice

Q25. La première colonne de la matrice donne $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, d'où $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|$ (la norme n'étant pas précisée, rien ne dit que les vecteurs de la base canonique sont de norme 1). Comme $|\lambda_1| < 1$ par hypothèse, il vient $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$, d'où $\lim\limits_{k\to\infty} u^k(e_1) = 0$.

Q26. L'hypothèse selon laquelle $\lim\limits_{k\to\infty} u^k(e_j)$ pour tout $j \in [\![1,i]\!]$ est vérifiée pour $i=1$ d'après la question 25. La matrice T est triangulaire supérieure, donc $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i+1})$ est stable par u. Plus précisément, la $i+1^{\text{ème}}$ colonne de la matrice donne $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$ avec $x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$. Montrons maintenant par récurrence simple sur k la formule

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

Pour $k=1$, cette formule n'est autre que $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$, ce qui vient d'être établi. Supposons la formule vérifiée à l'ordre k. Alors,

$$\begin{aligned}
u^{k+1}(e_{i+1}) = u\big(u^k(e_{i+1})\big) &\overset{(\mathrm{HR}(k))}{=} \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x) \\
&\overset{(\mathrm{HR}(1))}{=} \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \lambda_{i+1}^k x + \sum_{m=1}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x),
\end{aligned}$$

ce qui établit la formule à l'ordre $k+1$.

Q27. Commençons par remarquer que, par hypothèse, $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ et que $\lim\limits_{m\to\infty} u^m(e_t) = 0$ pour tout $t \in [\![1, i]\!]$. Par linéarité de la limite, on a donc $\lim\limits_{m\to\infty} u^m(x) = 0$. L'inégalité triangulaire donne

$$r_{i,k}(x) = \left\| \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

La convergence de la suite $\big(u^m(x)\big)_m$ assure qu'elle est bornée ; il existe donc un réel $A > 0$ tel que $\|u^m(x)\| \leqslant A$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit $k' \in [\![2, k-2]\!]$. On peut poursuivre la majoration

$$\begin{aligned}
0 \leqslant r_{i,k}(x) &\leqslant \sum_{m=0}^{k'-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| + \sum_{m=k'}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \\
&\leqslant k' |\lambda_{i+1}|^{k-k'} A + \max_{k' \leqslant m \leqslant k-1} \|u^m(x)\| \sum_{m=k'}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\
&\leqslant k' |\lambda_{i+1}|^{k-k'} A + \max_{k' \leqslant m \leqslant k-1} \|u^m(x)\| \times \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}
\end{aligned}$$

Pour $k' = \lfloor k/2 \rfloor$, on obtient une majoration en

$$\mathcal{O}\big(k|\lambda_{i+1}|^{k/2}\big) + \mathcal{O}\left(\max_{\lfloor k/2 \rfloor \leqslant m \leqslant k} \|u^m(x)\| \right),$$

quantité qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini par croissances comparées. Corrélativement, la formule de la question 26 montre que $u^k(e_{i+1})$ est la somme de deux termes de limite nulle, donc est de limite nulle.

Q28. Matriciellement, $\lim\limits_{k\to\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$ se traduit par $\lim C_{i+1}(T^k) = 0$. Ainsi, toutes les colonnes de $T-k$ tendent vers 0, donc $\lim T_k = 0$ (limite coefficient par coefficient).

Q29. Toute matrice complexe A est semblable à une matrice triangulaire supérieure et l'on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec P inversible. Alors, $A^k = PT^kP^{-1}$. D'après la question 28, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$. La continuité de l'application linéaire $M \longmapsto PMP^{-1}$ donne alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Partie III — Application à la méthode de Gauß-Seidel

Q30. Par construction, M est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont ceux de A, lesquels sont non nuls par hypothèse (diagonale strictement dominante). Donc M est inversible.

On pose $B = M^{-1}F$, $X_0 \in \mathbb{C}^n$ (vecteur colonne) et $X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$.

Q31. À partir des définitions, il vient

$$AX = Y \iff MX = FX + Y \iff X = M^{-1}FX + M^{-1}Y \iff X = BX + M^{-1}Y.$$

Q32. Par hypothèse, $BV = M^{-1}FV = \lambda V$, d'où, en multipliant par M, $FV = \lambda MV$. De manière équivalente, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$FV_{|i} = (\lambda MV)_{|i} \iff \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} v_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} v_j \iff -\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} v_j$$
$$\iff \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right)$$

Q33. On considère la coordonnée i_0 de V qui réalise sa norme infinie (le maximum d'une partie finie de $\mathbb{R}$ est toujours atteint). Comme V est un vecteur propre, il est non nul, donc $\|V\|_\infty = v_{i_0} \neq 0$. On prend $i = i_0$ et l'on applique l'inégalité triangulaire. Il vient

$$|\lambda a_{i_0,i_0} v_{i_0}| \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}||v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}||v_j| \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}||v_{i_0}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}||v_{i_0}|$$
$$\therefore \qquad |\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}|$$

en divisant par $|v_{i_0}|$.

Q34. Par définition d'une matrice à diagonale dominante et par l'inégalité précédente

$$|\lambda| \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}| < |\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| \qquad \therefore \qquad \big(1 - |\lambda|\big) \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| > 0,$$

d'où $|\lambda| < 1$. On peut alors appliquer la question 29 à la matrice B, dont le spectre est inclus dans le disque unité ouvert, soit $\lim\limits_{k \to \infty} B^k = 0$.

Q35. Par construction, on a

$$X_{k+1} - X = (BX_k + M^{-1}Y) - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X)$$

d'où $X_k - X = B^k(X_0 - X)$ par une récurrence immédiate. Alors, la continuité de l'application linéaire $M \longmapsto M(X_0 - X)$ (on est en dimension finie) donne $\lim X_k - X = 0$, soit $\lim X_k = X$.

PSI

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE 2023

DE MATHÉMATIQUES

1/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

L'exercice couvre une part significative du programme d'analyse (intégration, séries entières, équations différentielles). Il aboutit à une expression explicite des coefficients du développement en série entière de la fonction de Bessel.

Le premier problème aborde la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ avec des questions d'analyse et de probabilités. La première partie consiste en une question de cours et application. La deuxième partie permet de calculer la probabilité de retour à l'origine de la particule lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini. La troisième partie mène au calcul du nombre moyen de passages à l'origine de la particule lorsque le nombre de pas tend vers l'infini, que la marche soit symétrique ou non.

Le second problème s'intéresse au comportement asymptotique de la suite des puissances itérées d'une matrice dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. La première partie est l'étude d'un cas particulier et fait appel aux connaissances portant sur la diagonalisation de matrices. La deuxième partie traite du cas où tous les éléments du spectre de la matrice sont de module strictement inférieur à 1. Cette partie commence par traiter le cas où la matrice est triangulaire supérieure et se poursuit par une étude qui permet de conclure dans la dernière question au cas d'une matrice quelconque en utilisant la propriété de trigonalisabilité des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Enfin, la troisième partie est une application à l'étude d'une méthode numérique dite de Gauss Seidel pour la résolution d'un système linéaire appliquée à une matrice à diagonale strictement dominante.

Commentaire général sur les copies

Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble, mais on regrette la présence trop importante de ratures et de surcharges ou encore d'abréviations qui nuisent à la lisibilité. Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours.

Notons également que l'honnêteté intellectuelle est évaluée dans les copies. En particulier dans les démonstrations où le résultat est donné dans l'énoncé, donner le résultat réellement obtenu peut permettre de gagner quelques points là où tenter le bluff pour tomber à tout prix sur le résultat de l'énoncé n'en vaudra aucun.

2/ ANALYSE DÉTAILLÉE DES QUESTIONS

a) Exercice

Q1 : la question est théoriquement simple et les réponses sont souvent compliquées. La plupart des candidats ne savent pas vraiment ce qu'ils cherchent et donnent une réponse souvent disproportionnée dans le meilleur des cas (ils montrent par exemple la continuité de f par théorème d'intégrales dépendant d'un paramètre), fausse sinon.

Q2 : l'existence du théorème qu'il fallait utiliser ici est souvent connue mais la mise en œuvre est plus délicate. Certains candidats n'ont pas cherché à justifier le résultat. Quelques fois, le calcul de la dérivée est faux.

Q3 : les candidats manquent souvent de précaution en parlant de dérivabilité pour une fonction de deux variables. Certains calculs sont inexacts.

Q4 : question souvent délaissée par les candidats, mais assez correctement abordée lorsque c'est le cas.

Q5 : question classique mais, malgré tout, les candidats dérapent facilement dans la réorganisation des termes de la série et les réindexations nécessaires, ce qui conduit malheureusement parfois à des coups de bluff.

Q6 : le développement en série entière du cosinus est souvent bien connu mais peu précisent le rayon de convergence et l'interversion série intégrale est rarement correctement justifiée.

Q7 : peu de réponses, très peu de bonnes réponses. Les candidats invoquent par réflexe le théorème d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, ou encore l'unicité d'une série entière sans préciser dans quel contexte cette phrase a du sens.

Q8 : question également peu abordée et rarement bien traitée, des confusions apparaissant notamment entre les indices.

b) Problème 1

Q9 : une question de cours plutôt bien réussie malgré quelques confusions avec les développements limités.

Q10 : il est arrivé de voir des réponses justes en application d'une question 9 fausse. Avoir le résultat sous les yeux donne trop souvent lieu à des calculs malhonnêtes.

Q11 : question assez bien traitée, l'erreur la plus courante étant l'oubli de préciser que les variables sont indépendantes avant de conclure à une loi binomiale.

Q12 : certains candidats n'appliquent pas les résultats précédents et tentent de retrouver une loi binomiale.

Q13 : la plupart des candidats pensent à utiliser la formule de Stirling mais certains se heurtent à des difficultés de calculs.

Q14 : question plutôt bien traitée malgré une mauvaise compréhension de la signification de l'indice n de la variable aléatoire T_n.

Q15 : certains candidats affirment par automatisme que le paramètre de la loi de Bernoulli est de nouveau égal à p alors que ce paramètre est le résultat d'un précédent calcul.

Q16 : lorsqu'elle est abordée, la question conduit souvent à des résultats corrects. Il fallait penser à justifier de pouvoir appliquer la question 10.

Q17 : question parfois traitée partiellement, la récurrence est plus ou moins bien menée jusqu'au bout.

c) Problème 2

Q18 : cette première question du problème d'algèbre est souvent bien traitée. Certains candidats ont mené toute l'étude du polynôme caractéristique pour y répondre. Ils auraient gagné du temps en lisant les questions suivantes qui aidaient à détailler cette démarche.

Q19 : question bien traitée sauf de rares exceptions et quelques candidats qui ont multiplié au lieu d'ajouter les coefficients dans le produit matriciel.

Q20 : certains candidats ont bien traité la question même si le détail des opérations sur les lignes ou colonnes pouvaient manquer et quelques fois cacher des erreurs. Certains ont eu l'habileté d'exploiter la connaissance d'au moins une valeur propre.

Q21 : certains candidats ont refait les mêmes calculs qu'en question 20 alors que l'énoncé les amenaient à utiliser le résultat de la question 20.

Q22 : on observe beaucoup de confusions dans les réponses données. Le théorème de Cayley-Hamilton est souvent invoqué pour montrer que $Q_{a,b}$ est annulateur de $M(a, b)$ alors qu'il est hors sujet ici. Les correcteurs s'étonnent de voir citée, très souvent de manière incorrecte, la notion de polynôme minimal annulateur alors que ce n'est pas au programme. En revanche, la caractérisation d'une matrice diagonale par existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples est en général bien exploitée. Le cas particulier $a = 0$ est souvent oublié.

Q23 : les candidats qui abordent cette question sont ceux qui connaissent la méthode et les calculs à mener. Ceux-là parviennent généralement à donner le bon résultat. Certains tentent maladroitement de "poser" une division euclidienne sans savoir de quoi il s'agit.

Q24 : cette fin de partie est traitée essentiellement par les candidats qui ont réussi la question 23. La rédaction peut sembler parfois hâtive.

Q25 : beaucoup d'erreurs de rédaction sont signalées, notamment lorsque le candidat ne distingue pas les égalités vectorielles des égalités en normes. Sur de nombreuses copies on lit que $|| e_1 || = 1$.

Q26 : la première partie est relativement bien traitée malgré des explications un peu simplistes parfois. La deuxième partie est plus technique et lorsqu'elle est abordée, elle l'est par une récurrence plus ou moins bien menée.

Q27 : les bonnes réponses à cette question difficile sont ici exceptionnelles. Certains candidats se sont aventurés dans une démonstration sans avoir repéré la principale difficulté de cette question.

Q28 : quelques candidats ont su reconnaître la récurrence entamée dans les questions précédentes.

Q29 : cette fin de partie est peu abordée mais l'argument de trigonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le plus souvent formulé à bon escient.

Q30 : les candidats justifient la plupart du temps par un calcul de déterminant, parfois par le résultat admis sur les matrices à diagonale strictement dominante. Mais on observe également beaucoup d'arguments faux, comme les matrices triangulaires donc inversibles, ou encore que les coefficients diagonaux de A sont non nuls parce que A est inversible.

Q31 et Q32 : ces questions sont sans difficulté mais ont été trop peu abordées.