ψ

Chauffe 2025 en PSI 945/999/972

« Dites, vous savez qu'à solliciter trop souvent la patience des gens, on finit par agacer ? » – Léodagan

Stéphane Gonnord – Lycée du parc

14 mai 2025

Table des matières

Introduction

Il convient de se (re)mettre au point sur le cours concernant le thème du jour et de travailler un certain nombre d'exercices avant les séances dédiées. Si les points de cours signalés en introduction vous laissent perplexes, il y a peut-être lieu d'exhumer lesdits cours et reprendre les points en question. Pour certains points de cours l'annotation [PREUVE] signifie qu'il serait de bon ton de savoir prouver le résultat. Parfois c'est la connaissance de la [DÉFINITION] précise qui est la priorité.

Une évaluation du niveau à la louche (note sur 10, croissante en fonction de la difficulté) est donnée, indépendamment du concours : un CCINP 6/10 est a priori de niveau comparable à un Mines 6/10 : c'est plutôt difficile pour un CCINP et dans la tranche « moyen-moins » pour un Mines.

Planning prévisionnel pour les 46 heures de la chauffe :

1. Jeudi 15 et vendredi 16 mai 2025 : suites et séries numériques. [4H]
2. Lundi 19, mardi 20 et mercredi 21 (1H) : algèbre linéaire. [5H]
3. Mercredi 21 (2H), jeudi 22 et vendredi 23 (1H) : réduction. [5H]
4. Vendredi 23 (1H) lundi 26 et mardi 27 : probabilités. [5H]
5. Mercredi 28 mai : diverses choses, et séance tampon pour récupérer le retard. [3H]
6. Lundi 2 et mardi 3 juin (3H) : suites et séries de fonctions. [5H]
7. Mardi 3 (1H), mercredi 4 et jeudi 5 : intégration. [6H]
8. Mardi 10 et mercredi 11 : espaces euclidiens et leurs endomorphismes. [5H]
9. Jeudi 12 et mardi 17 : équations différentielles. [4H]
10. Jeudi 19 et vendredi 20 : (topologie et) calcul différentiel. [4H]
11. Vendredi 20, 11H45 : adieux déchirants.

Il y aura par ailleurs en fin de préparation un stage commando Python pour les admissibles à centrale :

1. Le samedi 14 juin à partir de 9H (bon OK, je viens avec les croissants), stage commando Python pour les admissibles à centrale : principe et exemples d'oraux de maths pythonisés.
2. Le mercredi 18 juin de 13H30 à 17H30 : passage public de colles Python/centrale. Un collé passe en conditions réelles toutes les 30 minutes, et des spectateurs (bienveillants !) peuvent assister aux oraux, en ayant eux-mêmes éventuellement préparé le sujet pendant 30 minutes (j'essaierai d'avoir une grande salle info).

Chapitre 1

Suites et séries numériques

1.1 Rappels de cours

Directement du cours :

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. [PREUVE]
— Convergence des séries de Riemann. [PREUVE]
— Convergence et contrôle du reste pour les séries alternées.
— Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positif. Savoir par exemple prouver : si $u_n = O(v_n)$ avec $u_n, v_n \geqslant 0$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
— Règle de d'Alembert (Pfffffff.....). [PREUVE]
— Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Proche du cours :

— Convergence des séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ (hors programme, mais...).
— Formule de Stirling.
— $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (dans la zone grise du programme, mais utilisable si vous savez effectivement le retrouver... et après accord de l'examinateur).

1.2 Posés en 2024

Exercice 1 – *Mines PSI 2024 [7/10]*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geqslant 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$

1. Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque la suite (x_n) est constante.
2. Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque $x_n = a\, b^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
3. Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $\left(x_n^{1/2^n}\right)$ est bornée.

Exercice 2 – *Mines PSI 2024 [4/10]*
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_{3n} = \dfrac{2}{\ln(n+3)}$ et $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \dfrac{-1}{\ln(n+3)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$?
3. Montrer, pour tout entier $p \geq 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

Exercice 3 – *Mines PSI 2024 [8/10]*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 4 – *CCINP PSI 2024 [2/10]*

1. Soit $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.
2. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice 5 – *CCINP PSI 2024 [3/10]*

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées.
2. Étudier la nature de la série $\sum \cos\left(\pi n^2 \ln(1+1/n)\right)$.

Exercice 6 – *CCINP PSI 2024 [3/10]*

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées.
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ converge. La convergence est-elle absolue ?
3. En déduire la nature de la série $\sum (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n^2t^2} dt$.

1.3 Posés en colle

Exercice 7 – *Colle 2023-2024 [7/10]*
On définit $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Encadrer u_n puis en donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
2. On définit $v_n = u_n - \dfrac{\ln^2 n}{2}$. Étudier la monotonie puis la convergence de (v_n).
3. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln k}{k}$.

Exercice 8 – *Colle 2023-2024 [3/10]*
Convergence et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9 – *Colle 2023-2024 [2/10]*
Nature et somme de $\sum \dfrac{\cos(n)}{2^n}$.

1.4 Récolte 999

Exercice 10 – *Centrale 2018 [4/10]*

1. Citer précisément le théorème des séries alternées.
2. Étudier la nature de la série de terme général $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 11 – *IMT 2018, CCP 2015 [3/10]*
Pour $\alpha > 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer : $R_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. Étudier la convergence de $\sum \dfrac{R_n}{S_n}$.

Exercice 12 – *Mines 2017 [7/10]*
Donner la nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 13 – *Centrale 2017 (deux fois) [7/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n l'unique racine positive de l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

1. Justifier l'existence de chaque a_n.
2. Étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on montrera que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
3. Donner un équivalent simple de $a_n - \ell$.

1.5 Mais aussi

Exercice 14 – *Mines 2016 [6/10]*
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{(n!)^{1/n}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 15 – *Mines 2016 [4/10]*
Soit $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n$. Déterminer la limite de (u_n). Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n - 1}{n}$?

Exercice 16 – *Mines (et autres) depuis 1985 [6/10/]*

1. Justifier l'existence de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.
2. Montrer : $(n+1)!R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. En déduire la nature de la série de terme général $\sin(2\pi e n!)$.

Exercice 17 – *Centrale 2016 [7/10]*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}\cdot$

1. Nature de la série de terme général $1/x_n$?
2. Trouver une relation entre x_{n+1}^2 et $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}\cdot$
3. Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 – *CCP 2016 [5/10]*
On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}\mathrm{e}^{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{2}\cdot$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle est unique.
2. Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge.
4. À l'aide de la série de terme général $\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n)$, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $u_n \sim \dfrac{c}{2^n}\cdot$

Exercice 19 – *IMT 2016 [5/10]*
Soient $u_0 \in]0,1[$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}\cdot$ Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 20 – *TPE 2017 [6/10]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in]0, \pi/2]$, avec $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n^3 \sim 6(u_n - u_{n+1})$ et que $u_n^2 \sim 6\ln \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\cdot$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^p.

Exercice 21 – *Mines 2017 [9/10]*
Calculer un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\sqrt{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 – *Centrale 2017 [6/10]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On souhaite étudier la propriété : $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ si et seulement si $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{2}{n}\cdot$

1. Montrer l'implication directe.
2. On suppose (u_n) monotone. Montrer alors l'équivalence.
3. Sans l'hypothèse de monotonie, le résultat est-il vrai ?

Exercice 23 – *Navale 2018 [7/10]*
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}\cdot$

Exercice 24 – *CCP 2018 [2/10]*
Montrer que $\sum \left(\ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)\right)$ est convergente mais pas absolument convergente.

1.6 Indications

Exercice 1 – $y_{n+1} = \sqrt{K + y_n}$ étudiée de façon classique (souvent n'importe comment : vous pouvez donc vous démarquer !). Si $x_n = a\,b^{2^n}$, alors $y_n = by'n$ où (y'_n) nous ramène à la question précédente. Si $x_n^{1/2^n} \leqslant K$ alors par récurrence immédiate $y_n \leqslant y'_n$ ou (y'_n) est associée à la suite constante $x'_n = K$; (y_n) est donc bornée. Et comme (y_n) est croissante... Réciproquement si (y_n) est convergente alors elle est bornée. Or $y_n \geqslant \sqrt{\sqrt{...\sqrt{x_n}}} = x_n^{1/2^n}$.

Exercice 2 – Les sommes partielles sont nulles (une fois sur 3 !) ou au pire majorées (en valeur absolue) par quelque chose comme $\dfrac{1}{\ln(N/3)}\cdots$ donc convergent vers 0. Ensuite je prendrais bien $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}}\cdot$ Enfin $\sum\limits_{k=1}^{3n+2} u_k^p$ est une somme partielle de $\sum\limits_n \dfrac{2^{2k}+2}{\ln^2(n+3)}$ (si k est pair) donc diverge puisque $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2(n+3)}\right)\cdot$ Ce n'est pas très différent si p est impair.

Exercice 3 – Pour la première question : (u_n) est majorée par $u_1 + \zeta(2)$ puis $u_n = O(1/n)$. Ensuite, je me suis demandé si on ne pouvait pas montrer une majoration du type $u_n \leqslant \dfrac{K}{n^2}$. Ce n'est certainement pas le cas en prenant K quelconque : il faut déjà avoir $K \geqslant u_1$. Pour que l'inégalité passe à la récurrence, on a besoin (sauf erreur) de $n^3 + 2n^2 + 1 \leqslant K(n^3 - n^2 - 2n - 1)$: c'est certainement possible en prenant K plus grand qu'un majorant d'une suite qui converge vers 1...
Bon, en fait c'est bien plus simple que ça ! Le $O(1)$ (qui était certes non gratuit) devient $O(1/n)$ puis $O(1/n^2)$... et même $\sim 1/n^2$!

Exercice 4 – On a $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ (pas nécessaire pour montrer que le reste d'une série convergente tend vers 0 bien entendu !), donc $\sum v_n$ converge absolument puisque $v_n = O(1/n^{3/2})$.

Exercice 5 – Il me semble que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O(1/n^2)$.

Exercice 6 – $\displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt \leqslant \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt$, ce qui nous fournit la convergence absolue. Ensuite, $u = nt$ nous donne $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n^2t^2} dt = \frac{1}{n}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt - \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt\right)$ puis :

$$(-1)^n \int_0^1 \mathrm{e}^{-n^2t^2} dt = K\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

Exercice 7 – Une comparaison somme-intégrale standard donne un encadrement suffisamment fin pour avoir à la fois $u_n \sim \dfrac{\ln^2 n}{2}$ et la bornitude de (v_n) ; quant à la monotonie, pas envie de faire le calcul mais « ça doit bien se faire » (il y a des $o(...)$ hétérogènes, donc attention quand même). Pour la dernière question, la série est bien entendue convergente (série alternée dont la valeur absolue du terme général blablabla). Si on note S_n ce qu'on imagine, alors à mon avis on peut exprimer S_{2n+1} à l'aide de u_{2n+1} et u_{2n}, et on utilise alors le développement asymptotique $u_n = \dfrac{\ln^2 n}{2} + \ell + o(1)$ (je n'ai pas fait le calcul mais ça doit marcher comme pour l'existence de la constante d'Euler, non ?).

Exercice 8 – Série alternée ; les sommes partielles font apparaître des produits télescopiques qui se travaillent « à la Wallis », et doivent permettre de conclure avec peut-être un coup de Stirling.

Exercice 9 – $O(1/2^n)$ pour la convergence. Partie réelle de quelque chose qu'on sait sommer pour le calcul de la somme.

Exercice 10 – $\dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n})$... Nommer deux termes permettra de rédiger plus sereinement.

Exercice 11 – Pour le premier point, c'est du cours (comparaisons soigneuses somme/intégrale). Et puisque (S_n) converge, $\dfrac{R_n}{S_n}$ peut être comparé à quelque chose de simple et positif.

Exercice 12 – $\mathrm{Arccos}(\theta_0 + u) - \mathrm{Arccos}(\theta_0) \sim Ku$ avec $K \neq 0$ donne la convergence absolue pour $\alpha > 1$. Ensuite, $\mathrm{Arccos}(\theta_0 + u) - \mathrm{Arccos}(\theta_0) = Ku + K'u^2 + o(u^2)$ (avec $K' \neq 0$) donne la convergence pour $1/2 < \alpha \leqslant 1$ (semi-convergence plus convergence absolue) et la divergence pour $\alpha \leqslant 1/2$ (somme d'une semi-convergente et d'une divergente).

Exercice 13 – On représente le graphe de $f_n : x \mapsto x^n + \cdots + x^2 + x - 1$ et celui de f_{n+1} sur $[0,1]$... et on dispose de presque tout ce dont on a besoin ! Une fois établie la convergence décroissante de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on prendra un peu de soin pour passer la relation $a_n \dfrac{1-a_n^n}{1-a_n} = 1$ à la limite...

```
from scipy.optimize import fsolve
def a(n):
    def f(x):
        return sum(x**k for k in range(1, n+1))-1
    return fsolve(f, 0.5)[0]

>>> [a(n)-0.5 for n in range(1, 10)]
[0.5, 0.11803398874989468, 0.043689012692076368, 0.018790063675884205,
 0.0086603916420046057, 0.0041382583616553781, 0.0020170551781655277,
 0.00099417792287825879, 0.00049311828655185241]
```

En écrivant $a_n = 1/2 + \varepsilon_n$, on trouve $2\varepsilon_n = a_n^n(1/2+\varepsilon_n)$, puis (attention à a_n^n : on ne passe pas $a_n \sim 1/2$ à la puissance n comme ça !) :

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(1/2^n)$$

```
>>> [2**n*(a(n)-0.5) for n in range(1, 10)]
[1.0, 0.47213595499957872, 0.34951210153661094, 0.30064101881414729,
 0.27713253254414738, 0.2648485351459442, 0.25818306280518755,
 0.25450954825683425, 0.25247656271454844]
```

Exercice 14 – Une comparaison somme/intégrale permet d'encadrer $\ln u_n$ assez bien.

Exercice 15 – Je trouve $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{\ln n}\cdot$

Exercice 16 – La majoration de $(n+1)!R_n - 1$ demande un peu d'initiative. On peut par exemple majorer $\dfrac{(n+1)!}{k!}$ par $\dfrac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}$ pour $k \geqslant n+2$. Pour la dernière question, il s'agit de noter que d'une part $n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ est entier, et que d'autre part $\mathrm{e} - R_n \sim \dfrac{1}{n}\cdot$

Exercice 17 – Déjà, (x_n) est à valeurs positives, puis est croissante et enfin ne converge pas (sinon...), donc tend vers $+\infty$. Ensuite, $x_n \leqslant x_0 + \dfrac{n}{x_0}$ donc $\dfrac{1}{x_n} \geqslant \dfrac{x_0}{x_0^2+n}$ d'où la divergence de $\sum \dfrac{1}{x_n}\cdot$ Puisque $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$, on obtient $x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_k^2}\cdot$ On peut alors utiliser en première approximation la minoration $x_n^2 \geqslant 2n$ pour majorer $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_k^2}$ par un terme de l'ordre de $\ln n$, et enfin obtenir : $x_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 18 – Je n'aime pas trop (pas du tout !) la façon dont c'est posé, mais... bon, $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans lui-même (on ouvre pour la suite...). Puisque $\varphi(x) \geqslant x$ on obtient la décroissance de (u_n) puis sa convergence... vers 0. Ensuite, $u_{n+1} = u_n\dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n+1}}}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{2}$ puis $u_n \leqslant \dfrac{u_0}{2^n}\cdot$ Enfin, $v_n = \ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = -u_{n+1}$ est le terme général d'une série convergente, donc $(\ln(2^n u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 19 – Noter que $\varphi : x \mapsto \dfrac{x+x^2}{2}$ (qu'on représentera) stabilise $]0,1[$ permettra de montrer rapidement et correctement (vous distinguant donc de 95% des autres candidats) que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, on peut plisser les yeux en regardant le dessin puis noter qu'il existe $K \in [0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant K u_n$, et c'est à peu près réglé, non ?

Exercice 20 – Déjà (calmement...) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, le développement limité $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donnera d'une part $u_{n+1}-u_n = \sin(u_n)-u_n \sim \dfrac{u_n^3}{6}$ et d'autre part $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sin(u_n)}{u_n} = u_n\left(1-\dfrac{u_n^2}{6}+o(u_n^2)\right)$. Pour la dernière question, $\sum(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$ converge si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Appliqué à $\alpha_n = u_n$ on obtient la convergence de $\sum u_n^3$; appliqué à $\alpha_n = \ln(u_n)$ on obtient la divergence de $\sum u_n^2$.

Exercice 21 – Pour n pair (impossible de ne pas distinguer les deux cas !) :

$$S_n = S_{2p} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{p}\underbrace{\sqrt{2k}\,(1-(1-1/k+o(1/k)))}_{\alpha_k}$$

avec $\alpha_k \sim \beta_k = \sqrt{\dfrac{2}{k}}\cdot$ S'il est facile (comparaison somme/intégrale) d'obtenir un équivalent simple de $\sum\limits_{k=1}^{p}\beta_k$, le passage à $\sum\limits_{k=1}^{p}\alpha_k$ nécessite d'utiliser un théorème hors-programme... ou bien d'affiner l'équivalent : $\alpha_k = \beta_k+\gamma_k$, avec $\sum\gamma_k$ qui converge.

Exercice 22 – Pour le sens direct je passerais bien par un développement limité. Dans le cas monotone (donc décroissant vers 0 ; pourquoi ?) j'écrirais bien $u_n + u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$ avant de multiplier par $\sqrt{n}$ puis gendarmiser. Pour le contre-exemple (ben oui...) j'ai bricolé : $u_{2p} = \dfrac{1}{4p}$ et $u_{2p+1} = \dfrac{3}{4p}$; ça doit marcher...

Exercice 23 – Il s'agit de discuter (ça demande du soin et du temps, mais vous serez récompensés pour ça !). Par exemple si $a=b$...

Exercice 24 – $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{2n} + O(1/n^2)$...

Chapitre 2

Algèbre linéaire

2.1 Rappels de cours

Directement du cours :

— Polynômes : tête des (factorisations en) irréductibles ($\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$), définition et caractérisation des multiplicités des racines [DÉFINITION], relations coefficients-racines (à savoir retrouver).

— Polynômes d'interpolation de Lagrange.

— Comment sont *définis* les projecteurs et symétries ? Par quelles relations sont-ils *caractérisés* ? [DÉFINITION] et [PREUVE]

— Somme directe de (plus de deux) sous-espaces. [DÉFINITION]

— Construction d'une application linéaire à l'aide de sa restriction à des supplémentaires (au sens étendu, lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$).

— Déterminant de Vandermonde. [PREUVE]

Proche du cours :

— Images et noyaux itérés...

— Nilpotents : savoir montrer (d'au moins une façon) qu'ils sont trigonalisables, avant même le cours de réduction. Si l'indice de nilpotence de u est p et $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, alors...

— Si une matrice carrée a sa diagonale dominante (i.e. : ...) alors elle est inversible.

— Endomorphismes (et matrices) de rang 1. Ils vérifient par exemple $u^2 = (\mathrm{tr}\ u)u$. Quelle est la tête de leur matrice dans une base que l'on construit en commençant par une base du noyau ? Et en commençant par une base de l'image ?

2.2 Posés en 2024

Exercice 25 – *Mines PSI 2024 [6/10]*
Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p de rang r dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Déterminer la trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\Psi(X) = PX - XP$.

Exercice 26 – *Mines PSI 2024 [5/10]*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x_0 + i + j - 2)$ n'est pas inversible.

Exercice 27 – *Mines PSI 2024 [4/10]*
Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Exercice 28 – *Mines PSI 2024 [7/10]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

Exercice 29 – *Centrale PSI 2024 [3/10]*
Soit (P_n) la suite à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1. Déterminer le degré de P_n. Étudier la parité de P_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}\cdot$
3. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 30 – *Centrale PSI 2024 [5/10]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MA - AM$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme non injectif.
2. Trouver la dimension du noyau de Φ_A dans le cas où $A = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$.
3. Soit $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Montrer que Φ est linéaire et trouver son noyau.

Exercice 31 – *Centrale PSI 2024 [5/10]*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.
2. Montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.
   Indication : On pourra considérer $g : x \in \mathrm{Im}\,(f^k) \mapsto f(x)$.

Exercice 32 – *Centrale PSI 2024 [4/10]*
Soit $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}(C_1) + \mathrm{rg}(C_2)$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{4} \mathrm{rg}(A_k)$.
3. Si $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est-elle inversible ? Si oui, donner A^{-1}.

Exercice 33 – *CCINP PSI 2024 [3/10]*

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X+k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

   Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^n = 0$.

2. Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^p = 0$.

3. Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k k^p = 0$. Conclure.

Exercice 34 – *Navale PSI 2024 [4/10]*
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $F = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

2.3 Posés en 999

Exercice 35 – *Colles 2023-2024 [3/10]*
Soient A et B deux sev de E, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer :

$$f(A) \subset f(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A + \mathrm{Ker}\,(f) \subset B + \mathrm{Ker}\,(f)$$

Exercice 36 – *Colles 2023-2024 [3/10]*
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On définit $q = \mathrm{Id}_E - p$, ainsi que :

$$L = \{u \circ p \,|u \in \mathcal{L}(E)\} \quad \text{et} \quad M = \{u \circ q \,|u \in \mathcal{L}(E)\}$$

Montrer que L et M sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 37 – *ENSAM 2017 [4/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n.$$

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que f possède un polynôme annulateur de degré 2 ; en déduire f^{-1}.

Exercice 38 – *Mines 2017 [6/10]*
On définit, pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) & \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & x & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est dérivable, et calculer D_n'.
2. En déduire la valeur de D_n.

2.4 Mais aussi

Exercice 39 – *Mines 2016 [7/10]*
Trouver le polynôme de degré minimal qui, divisé par $X^2 + X + 1$, donne $X - 1/2$ pour reste et, divisé par $X^2 - X + 1$, donne $2 - X$ pour reste.

Exercice 40 – *Mines 2016 [3/10]*
Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : x \mapsto \sin(nx)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(g_0, f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n)$ est libre.

Exercice 41 – *Mines 2016 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$.
Déterminer la dimension de $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\ AM = MA\}$.

Exercice 42 – *CCP 2016 [4/10]*
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$. On note P le plan d'équation $x+y+z = 0$, D la droite d'équations $x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$, et p la projection sur P parallèlement à D.

1. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.
2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$. Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

Exercice 43 – *TPE 2016 [2/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, A^n est combinaison linéaire de A et A^2.
Calculer A^n.

Exercice 44 – *Mines 2016 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $A_{i,j} = \binom{i}{j}$ (nul si $j > i$). Déterminer l'inverse de A.

Exercice 45 – *St-Cyr 2017 [4/10]*
Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β, γ les racines complexes de P.

1. Calculer $s_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $s_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $s_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
2. En exploitant la division euclidienne de X^4 par P, calculer $s_4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

Exercice 46 – *IMT 2017 [5/10]*
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même défini par $f(M) = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
4. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?

Exercice 47 – *IMT 2017 [6/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit X une matrice telle que $X^2 = A$. Montrer que X et A commutent, puis que X est triangulaire supérieure.
2. Trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = A$.

Exercice 48 – *TPE 2017 [5/10]*
Soient E un espace vectoriel de dimension $2p$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

$$\varphi^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = p \tag{1}$$

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi) \tag{2}$$

$$\text{Il existe une base dans laquelle la matrice de } \varphi \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \tag{3}$$

Exercice 49 – *Mines 2017 [8/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}$ son indice de nilpotence.

1. Montrer que $p \leqslant 3$.
2. On suppose que $p = 3$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose que $p = 2$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 50 – *CCP 2018 [5/10]*
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Étudier la surjectivité de φ.

Exercice 51 – *Centrale 2018 [8/10]*

1. Soit u un endomorphisme de E (espace de dimension 3) tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Soit maintenant E un espace de dimension $3n$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(v) = 2n$. Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Im}(v)$ puis qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de v vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 52 – *Mines 2018 [8/10]*
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^n = 0$.

1. Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Déterminer $\operatorname{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 53 – *Mines 2018 [4/10]*
Calculer le déterminant et la trace de la transposition (vue comme endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

2.5 Indications

Exercice 25 – Raisonner d'abord sur le cas réduit où $P = J_r$, et calculer par bloc : $\Psi(E_{i,j})$ vaut 0 ou $\pm E_{i,j}$ selon les valeurs de i et j. Pour traiter le cas général, écrire $P = QJ_rQ^{-1}$ et travailler sur la base $(F_{i,j} = QE_{i,j}Q^{-1})_{i,j}$.

Exercice 26 – La famille de polynômes $(P(X), P(X+1), .., P(X+n-1))$ ne peut pas être libre... Partant d'une combinaison linéaire nulle non triviale $\lambda_0 P(X) + \lambda_1 P(X+1) + \cdots + \lambda_{n-1}P(X+n-1) = 0$, on doit pouvoir obtenir le caractère lié des colonnes de A.

Exercice 27 – Une éventuelle racine B serait nilpotente puisque $B^6 = 0$, donc $B^3 = 0$ (toujours ce petit résultat technique : l'indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace de travail), donc $B^4 = 0$, donc $A^2 = 0$, ce qui est faux.

Exercice 28 – Commencer par le cas $A = I_n$, puis A inversible. Pour le cas général, j'approcherais A par des matrices inversibles, genre $A + \frac{1}{p}I_n$...

Exercice 29 – P_n est unitaire de degré n, et a la parité de n. La question suivante est une simple récurrence... double. On peut en déduire que $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$ pour tout θ, ce qui fournit n racines distinctes dans $[-2, 2]$...

Exercice 30 – $\Phi_A(0) = \Phi_A(I_n) = \Phi_A(A) = 0$. Un calcul ou des considérations géométriques (stabilité de sous-espaces propres) pour la deuxième question (on trouve donc les matrices diagonales). Pour la dernière, classique, il s'agit de déterminer les matrices qui commutent avec toutes les autres. « on sait » que ce sont les matrices λI_n... et surtout on sait le montrer ! *Comment, au fait ?*

Exercice 31 – La première question est dans le cours de première année (et de deuxième aussi) et la seconde est dans le cours de seconde année (et souvent dans celui de première année !). Le théorème du rang appliqué à la restriction nous donne : $\mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1}) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f^k) \cap \mathrm{Ker}\,(f)\right)$.

Exercice 32 – Le rang r de A d'une matrice est le nombre de colonne maximal d'une sous-matrice $(2n, r)$ de A constituée de colonnes linéairement indépendantes... fournissant des sous-matrices de colonnes libres de C_1 et C_2. Le même argument sur les lignes dit que $\mathrm{rg}(C_1) \leqslant \mathrm{rg}(A_1) + \mathrm{rg}(A_2)$. Dans la dernière question, le déterminant de A est non nul, et on peut chercher l'inverse de A par un calcul par bloc. On trouvera $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4 \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}$

Exercice 33 – Dérivation, évaluation en 0.

Exercice 34 – Les deux implications se font de façon assez basique, pour peu qu'on adopte la méthodologie post-bac : se concentrer sur « où vais-je ? » plutôt que « où suis-je ? »

Exercice 35 – Je dirais bien : par double implication ? Encéphalogramme plat ; très bien.

Exercice 36 – $u = u \circ \mathrm{Id} = u \circ p + u \circ q$.

Exercice 37 – Il me semble que $f^2(M) = ... = (n+2)f(M) - nM$. On regarde ensuite droit dans les yeux la relation $f^2 - (n+2)f = -n\mathrm{Id}$, et on factorise f à gauche... Les amateurs d'endomorphismes de rang 1 auront plutôt considéré $f - \mathrm{Id}$...

Exercice 38 – $(\det(C_1(x), ...C_n(x)))' = \det(C_1'(x), C_2(x), ..., C_n(x)) + \cdots + \det(C_1(x), ..., C_{n-1}(x), C_n'(x))$...

Exercice 39 – Analyse : si un tel polynôme existe, alors ses valeurs en j, j^2, $-j$ et $-j^2$ sont imposées (avec j ce qu'on imagine). Synthèse : si un polynôme P prend les bonnes valeurs en ces 4 points, alors $P - (X - 1/2)$ s'annule en j et j^2 donc est divisible par $X^2 + X + 1$ (et de même pour la deuxième divisibilité).
Il reste à déterminer les polynômes prenant les 4 valeurs souhaitées. Il y a déjà celui fourni par Lagrange ; notons-le P_0. Les autres sont exactement les polynômes de la forme $P_0 + (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)Q$, donc sont tous de degré supérieur à P_0, et ce dernier polynôme est la réponse à l'exercice !
Bon, un volontaire pour déterminer P_0 (qui est probablement de degré 3, mais qui sait ?). Je n'ai pas envie de trop chercher : peut-être que ce n'était absolument pas demandé !
Mais peut-être qu'en réfléchissant un peu on peut l'avoir à moindre frais...

Exercice 40 – Les applications sont non nulles, et la famille en jeu est orthogonale pour un bon produit scalaire à mon avis...
Écœurés ? C'est la vie, les enfants...

Exercice 41 – On commence par montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que C_A est isomorphe à C_B donc est de même dimension. Ensuite, on montre plus ou moins élégamment que C_B est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
Le fait que $\mathrm{Ker}\,(B)$ *et* $\mathrm{Ker}\,(B^2)$ *soient stables par* $M \in C_B$ *peut déjà accélérer les calculs...*

Exercice 42 – Notons $v = (1, 3, 2)$ et $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + y + z$. L'hyperplan $P = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et la droite $D = \mathrm{Vect}(v)$ sont d'intersection nulle car $\varphi(v) \neq 0$ donc (dimensions) supplémentaires (vous savez encore le montrer ?). Ensuite, à $u = (x, y, z)$ fixé il s'agit de déterminer (après dessin) l'unique λ tel que $u - \lambda v \in P = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, et on a alors $p(u) = u - \lambda v$. À la fin, on augmente sa note de un point en vérifiant que la matrice obtenue est (ou n'est pas !) de trace égale à ce qu'il faut (à savoir ?).

Exercice 43 – On s'intéresse au reste dans la division euclidienne de X^n par le polynôme caractéristique de A, qui d'une part annule A et d'autre part s'annule en zéro (regardez la première et la dernière colonne...).

Exercice 44 – Quelle est donc la matrice de $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X + 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 45 – Je partirais bien de

$$X^3 + X + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma = 0$$

pour trouver immédiatement $s_1 = 0$, relation dont le carré fournit ensuite $s_2 = -2$; ensuite, $s_3 = -3 - s_1 = -3$ (ben oui : $\alpha^3 = -1 - \alpha$...) puis avec $X^4 = X(X^3 + X + 1) - X^2 - X$ on trouve $s_4 = -s_2 - s_1 = 2$.

```
from numpy.polynomial import Polynomial
P = Polynomial([1, 1, 0, 1])
r = P.roots()

for k in range(5):
    print(k, sum(x**k for x in r))
"""
0 (3+0j)
1 (-3.33066907388e-16+0j)
2 (-2+0j)
3 (-3+0j)
4 (2+0j)
"""
```

Exercice 46 – $u \circ v = 0$ si et seulement si l'image de v est incluse dans le noyau de u...

$$M \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(M) \subset \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \iff \exists \alpha, \beta;\ M = \begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\,(f)$ est donc de dimension $4 - 2 = 2$ et contient $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui sont non colinéaires. Ensuite, on prend un élément générique de l'image (sous forme paramétrique) et on observe s'il peut être dans le noyau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 10b \\ 10a & 20b \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = 0$$

L'image et le noyau sont d'intersection nulle, donc sont supplémentaires.

Exercice 47 – Puisque $XA = X.X^2 = X^3 = X^2.X = AX$, on a $\mathrm{Ker}\,(A - I)$ et $\mathrm{Ker}\,((A - I)^2)$ qui sont stables par X (il fallait peut-être le remontrer...) ce qui donne le caractère triangulaire supérieure. Avant de se lancer dans la synthèse avec X triangulaire supérieure générique, on peut noter que si X avait deux valeurs propres distinctes, alors cela fournirait à A deux droites stables, donc des vecteurs propres non colinéaires, ce qui est exclu. On peut donc chercher A sous la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta \\ 0 & \varepsilon & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, ce qui permet de gagner un peu de temps.

Exercice 48 – Il me semble que (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) ne posent pas (trop) de problème. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), j'appliquerais le théorème du rang en regardant dans les yeux l'inclusion $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Enfin pour (2) $\Rightarrow$ (3) je serais tenté de travailler dans une base adaptée constituée d'une base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ qu'on complète en une base de E.

Exercice 49 – Comme toujours, on prend X_0 tel que $A^{p-1}X_0 \neq 0$, et on sait/prouve alors que $(X_0, ..., A^{p-1}X_0)$ est une famille libre. Les questions 1 et 2 tombent alors gratuitement. Dans le cas $p = 2$, on complète (X_0, AX_0) en prenant un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(A)$ (de dimension 2) non colinéaire à AX_0. Pour le dernier point, le sens direct est facile ($\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(-A) = -\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A)$ donc la trace et le déterminant de A sont nul(le)s). Pour la réciproque il faut un peu plus travailler en notant que 0 est dans le spectre (déterminant nul).

— S'il y a une autre valeur propre (non nulle, donc) α, alors (regardons la trace !) $-\alpha$ est aussi valeur propre, et A possède 3 valeurs propres distinctes donc est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, elle-même semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ donc à $-A$.

— Si 0 est l'unique valeur propre, alors (on est sur $\mathbb{C}$!) le polynôme caractéristique est X^3, donc (Cayley-Hamilton) A est nilpotente, et on est ramené aux deux matrices des questions précédentes, dont il n'est pas difficile de voir qu'elles sont effectivement semblables à leur opposé (raisonner géométriquement en bricolant la base canonique de $\mathbb{R}^3$...).

Exercice 50 – Regarder le terme dominant de $\varphi(X^n)$ pour $n \geqslant 2$. Pour la dernière question, considérer la restriction, à n fixé, de φ à $\mathbb{R}_{n+2}[X]$.

Exercice 51 – Le noyau de v est de dimension n et contient $\mathrm{Im}\,(v^2)$, qui peut être vue comme l'image de la restriction de v à $\mathrm{Im}\,(v)$. Si on applique le théorème du rang à cette restriction, on trouve : $2n - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(v)) \leqslant 2n$ donc $\mathrm{Ker}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(v)$ est de dimension au moins n et est inclus dans $\mathrm{Ker}\,(v)$ qui est de dimension n... Il reste à prendre une base de $\mathrm{Ker}\,(v)$, la compléter pour en faire une base de $\mathrm{Im}\,(v)$. L'image des n derniers vecteurs par v va certainement permettre de compléter les $2n$ premiers vecteurs en une base intéressante de l'espace...

Exercice 52 – Le sous-espace engendré par $\mathcal{N}$ contient déjà toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$; il est par ailleurs (les matrices nilpotentes sont trigonalisables...) inclus dans $\mathcal{H}$ donc de dimension au plus $n^2 - 1$. On montre l'égalité en notant en dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui va nous fournir $n-1$ nouvelles matrices linéairement indépendantes des précédentes dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 53 – Puisque la transposition est involutive (transposé de la transposée...), il s'agit d'une symétrie, dont le déterminant et la trace se déduisent facilement de la dimension des sous-espaces propres, qui sont des sous-espaces connus de dimensions connues...

Chapitre 3

Réduction

3.1 Rappels de cours

Directement du cours :

— Les sous-espaces propres sont en somme directe. [SIGNIFICATION, PREUVE]

— Définition(s) de la diagonalisabilité pour un endomorphisme/une matrice. [DÉFINITION(S)] Équivalence des différentes définitions.

— Diverses conditions nécessaires/suffisantes de diagonalisabilité/trigonalisabilité :

  — Si A est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé (réciproque fausse).

  — Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable (réciproque fausse).

  — A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et les sous-espaces propres ont leurs dimensions égales aux multiplicités des valeurs propres.

  — A est diagonalisable si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

  — A est trigonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé. En particulier, c'est toujours le cas sur $\mathbb{C}$.

Proche du cours :

— Réduction des endomorphismes et matrices de rang 1 (et leurs cousin(e)s).

— Quand deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Application aux équations polynomiales.

3.2 Posés en 2024

Exercice 54 – *Mines PSI 2024 [5/10]*
Soit $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Interpréter géométriquement A.
2. Donner l'image du plan P d'équation $x - y - z = 0$ par A.

Exercice 55 – *Mines PSI 2024 [6/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Donner le spectre de A et ses espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$.
3. Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT = TM$. Quelle est sa structure ? sa dimension ?
4. Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 56 – *Mines PSI 2024 [4/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -14 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X+1)^2(X+2)Q_n(X) + \alpha_n(X+2) + \beta_n(X+1)(X+2) + \gamma_n(X+1)^2$.
3. Déterminer A^n.

Exercice 57 – *IMT PSI 2024 [3/10]*
Soient $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 0 est valeur propre de A.
2. Montrer que X est un vecteur propre de A.
3. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Exercice 58 – *IMT PSI 2024 [2/10]*
Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

1. Exprimer A en fonction de I, J et J^2.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser A.

Exercice 59 – *Mines PC 2024 [9/10]*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A. Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

Voici comment on pourrait poser plus raisonnablement cet exercice :

Exercice 60 – *Wherever 2025 [7/10]*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A.

1. On suppose que A n'est pas de la forme λI_n. Montrer que A est semblable à une matrice dont la première colonne est non nulle mais possède 0 en position $(1,1)$.
2. Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

Exercice 61 – *Mines PC 2024 [7/10]*
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A-B) \in \{-1,0,1\}$.
On pourra montrer qu'il existe une base de l'espace adaptée en même temps aux deux endomorphismes canoniquement associés à A et B.

Exercice 62 – *Mines PSI 2024 [6/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer une matrice semblable à A, diagonale ou triangulaire.
2. Expliciter $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$.
3. Soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. Quels sont les sous-espaces vectoriels f_A-stables de $\mathbb{C}^3$?
4. Peut-on retrouver C_A par des arguments de stabilité ?

Exercice 63 – *CCINP PSI 2024 [6/10]*
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AU = UB$.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule A, alors les valeurs propres de A sont racines de P.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.
3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

Exercice 64 – *X PC 2024 [2/10]*
Soient $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 65 – *IMT PSI 2024 [4/10]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose A diagonalisable. Diagonaliser la matrice B.

Exercice 66 – *CCINP PSI 2024 [4/10]*
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice M_α est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le rang de M_α.

3. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
4. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M_{-1}$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$. Montrer que $B\Delta = \Delta B$.
6. En déduire les solutions $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $B^2 = \Delta$.
7. En déduire les solutions $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $A^2 = M_{-1}$.

Exercice 67 – *Centrale PSI 2024 [8/10]*
Soient a, b, c des réels tels que $a + b + c = 1$.

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Montrer qu'il existe u de module 1 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels positifs tels que $z_1 = \alpha_1 u$, $z_2 = \alpha_2 u$ et $z_3 = \alpha_3 u$.
2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver ses valeurs propres.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Quelle est la limite de la suite $(M^n)_{n\geqslant 1}$?

Exercice 68 – *Centrale PSI 2024 [7/10]*
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$.
On note $d = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_2\}$.

1. Montrer que M est diagonalisable, que ses valeurs propres sont de module égal à 1 et : $|\mathrm{tr}(M)| \leqslant 2$.
2. On suppose que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Donner les valeurs possibles de d.
3. On suppose que les valeurs propres de M sont toutes dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Montrer que M a pour polynôme annulateur $X^2 + 1$, $X^2 - X + 1$ ou $X^2 + X + 1$. Donner les valeurs possibles de d.

3.3 Posés en colle

Exercice 69 – *Colles 2023-2024 [4/10]*
Diagonalisabilité de $A = \left(\left(\dfrac{i}{j}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 70 – *Colles 2023-2024 [3/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que AB est diagonalisable et A est inversible. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 71 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer le commutant de D (ce qu'on imagine) puis de A.

Exercice 72 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 73 – *Colles 2023-2024 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 74 – *Colles 2023-2024 [8/10]*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Montrer que f est diagonalisable, et déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

3.4 Récolte 999

Exercice 75 – *CCP 2018 [6/10]*
On définit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $E = \mathrm{Ker}\,(f^2) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
2. Trouver un vecteur appartenant à $\mathrm{Ker}\,(f^2)$ mais pas à $\mathrm{Ker}\,(f)$.
3. Expliciter une base de E dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. (a) On suppose que $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $g^2 = f$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f^2)$ est stable par g.
   (b) Trouver l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g^2 = f$.

Exercice 76 – *CCP 2018 [6/10]*
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ? inversible ? Donner ses éléments propres.
2. Donner les éléments propres de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ Est-elle diagonalisable ?

Exercice 77 – *Centrale 2018 [7/10]*
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. On note E_X l'ensemble des matrices ayant X comme vecteur propre.

1. Montrer que E_X est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E_X.
3. Expliciter E_X lorsque $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 78 – *Centrale 2018 [1/10]*
Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

Exercice 79 – *CCP 2018 (3 fois, à des dates différentes !) [3/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k B - BA^k = k\alpha A^k$.
2. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 80 – *Centrale 2018 [7/10]*
Soit $n \geqslant 2$, et A une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$. On s'intéresse à l'équation $B^2 = A$.

1. Résoudre cette équation lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Dans le cas général (au sens : n quelconque), discuter le nombre de solutions.

Exercice 81 – *Mines 2018 [8/10]*
Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & (0) & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple (portant sur χ_A) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 82 – *Mines 2018 [7/10]*
Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension fine. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$ si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}\{u^k\,, k \geqslant 2\}$.

Exercice 83 – *Mines 2018 [7/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices réelles (n, n) à coefficients dans $[0, 1]$ dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

1. Expliciter une valeur propre et un vecteur propres commun(ne)s à toutes les matrices de $\mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.
3. Soit $A \in \mathcal{S}$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module $\leqslant 1$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A - I_n) = \mathrm{Ker}\,((A - I_n)^2)$.

3.5 Mais aussi

Exercice 84 – *Mines 2016 [7/10]*
Déterminer $\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ M^5 = M^2 \text{ et } \mathrm{tr} M = n\right\}$.

Exercice 85 – *Centrale 2016 [6/10]*
Soient $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et C l'ensemble des $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tels que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrer que C est un espace vectoriel.
2. On suppose que f possède trois valeurs propres distinctes. Déterminer la dimension de C.
3. On suppose que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer la dimension de C.
4. Trouver f tel que C soit de dimension 5.

Exercice 86 – *ENSEA 2016 [3/10]*
Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est elle diagonalisable ?
2. Déterminer la limite de A^n quand n tend vers l'infini.

Exercice 87 – *IMT 2016 [4/10]*
Soient E est un espace vectoriel de dimension finie et s est une symétrie vectorielle. On pose pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = \dfrac{1}{2}(s \circ u + u \circ s)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$
2. Calculer φ^3 et en déduire un polynôme annulateur de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 88 – *TPE 2016 [6/10]*

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ -P & P \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres positives distinctes. Donner le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. La matrice B est-elle diagonalisable ?
3. Soient $E_n = \mathrm{Diag}(1, 2, ..., n)$ et $K_n = \begin{pmatrix} (n+1)I_n & E_n \\ E_n & (n+1)I_n \end{pmatrix}$. Calculer $\det(K_n)$.

Exercice 89 – *Mines et ENSAM 2018 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Trouver le signe de $\det(A)$.

Exercice 90 – *Centrale 2018 [5/10]*
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, et E_x l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ admettant x comme vecteur propre.
Montrer que E_x est un sous-espace vectoriel, et déterminer sa dimension.

Exercice 91 – *Centrale 2018 [7/10]*

1. Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont exactement les racines troisièmes de l'unité.
   Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. On fixe par ailleurs $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (n est un entier $\geqslant 3$).
2. On suppose ici que 1 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Montrer que n est pair.
   (b) Exprimer A^2 à l'aide de A et I_n.
   (c) Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue X.
3. On suppose enfin que 1 est valeur propre de A. Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue X.

Exercice 92 – *Mines 2018 [4/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^4 + 2A^2 + A = 0$. Montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. Qu'en déduire sur A ?

Exercice 93 – *Mines 2018 [6/10]*
Déterminer les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Exercice 94 – *Mines 2018 [7/10]*

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à spectre disjoints.
   (a) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = DB - AD$.
   (b) Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables. La matrice N est-elle diagonalisable ?
3. Commenter le cas $n = 1$.

3.6 Indications

Exercice 54 – A est une symétrie par rapport à une droite parallèlement à un plan. Puisque $P = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, son image par A est le plan engendré par l'image de ces deux vecteurs, à savoir : $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\6\\-5\end{pmatrix}\right)$. Bonus : en trouver une équation... Pour cela je m'intéresserais au rang de $\begin{pmatrix}3 & 7 & x\\-1 & 6 & y\\0 & -5 & z\end{pmatrix}$: il vaut 2 si et seulement si $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ appartient à ce plan. On pivote pour aller plus loin et obtenir l'équation recherchée.

Exercice 55 – $\chi_A = X(X-1)^2$ et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1. Pour compléter le début de base qu'on imagine, on peut chercher f_3 tel que $u(f_3) = f_3 + f_2$ par exemple, ou bien prendre un f_3 quelconque (mais non colinéaire à f_2) dans $\text{Ker}\left((u-\text{Id})^2\right)$. Le commutant de T peut se déterminer par méthode brutale... ou être accéléré par des considérations de stabilité : il y a deux droites et un plan qui sont stables... Bref ou trouvera les $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\0 & \beta & \gamma\\0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$

Enfin, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ met certainement en bijection le commutant de ... et celui de ...

Exercice 56 – Sans trop de surprise : $\chi_A = (X+1)^2(X+2)$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 1. Ensuite, division euclidienne par ce qu'on imagine, et expression du reste dans une famille libre. Pour prouver la liberté, on peut évaluer en -1 et -2. Pour expliciter la décomposition (qui sera utilisée après CayleyHamiltonisation), on obtiendra par ces évaluations α_n et γ_n. Pour β_n, on peut peut-être dériver avant d'évaluer en la racine double -1.

Exercice 57 – On dispose des valeurs propres 0 et $-1+j$. On trouve la troisième (notion à préciser) via la trace, ou bien en notant que $AX = \lambda X$ implique (lorsque A est à coefficients réels) : $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$.

Exercice 58 – Puisque $A = aI + bJ + cJ^2$, les vecteurs propres $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$ de J en sont aussi pour A, mais associés aux valeurs propres $a+b+c$, $a+bj+cj^2$ et $a+bj^2+cj$.

Exercice 59 – Voir l'exercice suivant !

Exercice 60 – De façon classique (par exemple en travaillant sur une base) : si pour tout x on a $(x, u(x))$ liée alors u est une homothétie. Ensuite par la contraposée, si A n'est pas de la forme λI alors son endomorphisme canoniquement associé a n'est pas une homothétie, donc on peut trouver x_0 tel que $(x_0, a(x_0))$ est libre. On complète en une base et on regarde la matrice de a dans cette base.
Après avoir noté qu'évidemment si A est une homothétie alors $\mathcal{S}(A)$ est réduit un singleton, on montre que dans le cas contraire (A n'est pas une homothétie) alors $\mathcal{S}(A)$ est infini. Déjà, $\mathcal{S}(A)$ contient une matrice B de la forme donnée par la question précédente. Or un changement de base où on se contente de multiplier le premier vecteur par un scalaire non nul nous donne autant de matrices différentes semblables à B donc à A. Ainsi, seules les matrices d'homothétie ont une classe de similitude finie.

Exercice 61 – a et b sont des projections. On a en particulier $E = \text{Im}\,(a) \oplus \text{Ker}\,(a)$. Mais a et b commutent, donc b induit un endomorphisme sur ces deux sous-espaces. Et ces endomorphismes restent des projections (la relation $b^2 = b$ passe aux restrictions) donc on peut en trouver des bases diagonalisant les restrictions de b. En recollant ce deux bases on a ce qu'on veut.
Notons que via la caractérisation de la diagonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, on montre par le même procédé que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables.

Exercice 62 – A est de rang 1, et un vecteur de base de son image (sa première colonne f_1, au hasard), est dans son noyau. On construit alors facilement une base adaptée en prenant $f_3 = e_1$ et f_2 un habitant du noyau non colinéaire à f_1 ; par exemple $\begin{pmatrix} j \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour C_A, plutôt qu'un calcul brute-force j'ai commencé par des considérations de stabilité qui racontent que $\mathrm{Ker}\,(f_A)$ et $\mathrm{Ker}\,(f_A^2)$ sont stable par tout endomorphisme qui commute avec a. Finalement, C_A est fortement relié aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 0 & \gamma & \varepsilon \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
Les droites stables par f_A sont celles engendrées par un vecteur propre, c'est-à-dire n'importe quel vecteur non nul du noyau. Pour les plans, il y a évidemment le noyau... mais ce n'est pas le seul ! Analyse : si un plan F est stable par f_A alors $f_A(F)$, qui vaut $\{0\}$ ou $\mathrm{Vect}(f_1)$, est inclus dans F. Dans le premier cas F est inclus dans le noyau donc est égal à ce noyau (dimensions) ; dans le second, $f_1 \in F$. Dans les deux cas, F contient f_1. Réciproquement, si F est un plan qui contient f_1 alors il est stable par f_A.

Exercice 63 – La première question, c'est du cours. On y dit à un moment que $P(A)X = P(\lambda)X$, accessoirement... Ensuite on peut s'intéresser à A^2U puis A^kU... Enfin, en appliquant ce qui vient d'être montré à $P = \chi_A$ on obtient $U\chi_A(B) = 0$, donc $\chi_A(B)$ est non-inversible. Mais puisqu'on a $\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{\alpha_\lambda}$, l'un des termes de ce produit est non inversible, fournissant une valeur propre commune à A et B.

Exercice 64 – Heu, celui qui est tombé sur cet exercice a probablement raconté beaucoup de bêtises avant ! Il me semble que la réduction de $A + I$ doit prendre moins d'une minute (partons sur 3 minutes si on n'est pas réveillé)... A est finalement semblable à $\mathrm{Diag}(-1, -1, ..., -1, n-1)$.

Exercice 65 – Valeurs propres 0 et 1 avec pour vecteurs propres par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ensuite, si $AX = \lambda X$ alors $B\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ et il reste à prouver la liberté de la famille (de 4 vecteurs) qu'on imagine.

Exercice 66 – Mais que cet énoncé est poussif... Les valeurs propres comptées avec multiplicité sont $1, 4$ et $\alpha + 1$. Il s'agit donc d'observer les cas où $\alpha + 1$ vaut 1 où 4 : on s'intéresse alors à **la dimension** du sous-espace propre associé à la valeur propre double... et pour cela il suffit de calculer un rang. Ensuite, commutant d'une matrice diagonale à éléments diagonaux distincts, puis mini analyse-synthèse : on trouve 4 solutions.

Exercice 67 – Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire... La réduction de J fournit celle de $M = aI + bJ + cJ^2$, et on aura $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L = P\mathrm{Diag}(1, 0, 0)P^{-1}$ d'après la première question. On peut calculer P et P^{-1} à (relativement) moindre frais, mais on peut aussi (c'est malin) noter que M a ses colonnes (mais aussi lignes) de somme constante égale à 1, donc il en sera de même de ses puissances (cette relation est caractérisée par $MX = X$ avec X bien choisie) puis de la limite de (M^n). Par ailleurs, L est de rang 1. Toutes ses colonnes sont donc colinéaires puis égales (puisque la somme de leurs coefficients vaut 1). Mais il en est de même pour les colonnes. La seule possibilité est : $L = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Exercice 68 – $X^d - 1$ est un polynôme annulateur aux racines bien connues. Puisque la trace est réelle, il faut que les deux valeurs propres soient conjuguées, ce qui impose leur produit, mais aussi majore le module de leur somme. Comme cette somme est réelle, on a vite fait le tour des possibilités.
Au fait : $(X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) = X^2 - (\lambda + \overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda}$...
On peut classiquement en déduire que $A^{12} = I_2$ (c'est souvent cette question qui est posée, avec plus ou moins d'indications !)

Exercice 69 – Matrice de rang 1, de trace non nulle...

Exercice 70 – Ack affreux : $BA = A^{-1}(AB)A$.

Exercice 71 – $\chi_A = X(X-1)(X-4)$. Pour le commutant, on géométrise ou pas (commuter avec une diagonale à spectre simple est assez contraignant).

Exercice 72 – On $\chi_A = X(X^2 - (ab + ac - bc))$. Il reste à discuter de la position de $ab + ac - bc$ par rapport à 0...

Exercice 73 – Trigonaliser, et obtenir un système « à la Vandermonde » sur les valeurs propres et leurs multiplicités. Finalement il ne peut y avoir qu'une valeur propre, qui est nulle.

Exercice 74 – Le polynôme caractéristique vaut $(X-2)(X-4)(X-6)$. Pour les sous-espaces stables, ceux de dimension 0 et 3 sont assez simples. Ceux de dimension 1 aussi (forcément engendrés par des vecteurs propres). Pour ceux de dimension 2 il faut un peu travailler : si un plan P est stable, alors la restriction de f à P a un polynôme caractéristique qui ne peut pas être n'importe quoi, fournissant des valeurs propres donc des vecteurs propres imposés... finalement il y a 3 tels plans.

Exercice 75 – Comme bases respectives des sous-espaces proposés, je trouve $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ vs. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (le premier vecteur de la première base répondant d'ailleurs à la deuxième question...). Il n'y a plus qu'à réordonner pour répondre à la troisième question. Pour la dernière question, l'analyse nous propose comme candidats les endomorphismes dont la matrice dans la base adaptée précédente est de la forme $\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & \pm\sqrt{2}\end{pmatrix}$ mais la synthèse est impitoyable : tous les candidats sont rejetés.

Exercice 76 – Même si on ne reconnaît pas une matrice symétrique réelle, les éléments propres de A se calculent sans mal. Ceux de $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ sont également simples, et permettent de construire des éléments propres pour $\begin{pmatrix}A & A\\A & A\end{pmatrix}$ facilement : par exemple si $Af_1 = 3f_1$, alors en posant $X = \begin{pmatrix}f_1\\f_1\end{pmatrix}$...

Exercice 77 – On complète X en une base de $\mathbb{R}^n/\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, fournissant une matrice de passage P telle que : $M \in E_X$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & L\\(0) & N\end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Pour l'application numérique on peut prendre $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}$...

Exercice 78 – J'imagine que $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ doit fonctionner...

Exercice 79 – Classique (et diabolique) : l'opérateur $M \mapsto MB - BM$ possède un nombre fini de valeurs propres...

Exercice 80 – Après diagonalisation (n valeurs propres distinctes), faire une analyse-synthèse géométrique... ou matricielle ! On trouvera 2^n solutions.

Exercice 81 – Pour que A soit diagonalisable, il est évidemment suffisant que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ soit scindé à racines simples... mais c'est également nécessaire. En effet si A était diagonalisable avec $p < n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$, alors $P = (X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ serait annulateur de A. Mais si on regarde la première colonne de $P(A)$ (après avoir calculé A^2, A^3...) on voit que c'est impossible. *En termes snobs on dit que χ_A est ici le* polynôme minimal *de A.*

Exercice 82 – Dans le sens direct : la matrice de u dans une base adaptée est $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & B\end{pmatrix}$ avec B inversible. Le polynôme $X\chi_B$ est alors annulateur de u ; or il vaut $\pm\det(B)X + \alpha_2X^2 + \cdots$
Pour la réciproque, c'est plutôt plus simple (dimension et intersection réduite à 0).

Exercice 83 – Je trouve ça un peu difficile sans indication (la dernière question ; les précédentes ayant été traitées quelques fois dans l'année...). J'ai choisi X dans le noyau de $(A-I)^2$: $(A^n X)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais en écrivant $A = I + (A-I)$ et en Newtonisant on obtient $A^n X = X + n(A-I)X$...

Exercice 84 – Analyse : une éventuelle solution M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, avec sur la diagonale 0, 1, j et j^2. Pour que la somme de ces valeurs diagonales soit égale à n il est nécessaire que tous soient égaux à 1. On a alors $M = I + N$ avec N nilpotente, puis $(I_n + N)^2 = (I+N)^5$ puis par binomisation et liberté : $N = 0$. Ainsi, $M = I_n$. La synthèse semble abordable.

Exercice 85 – C est un noyau. Dans le cas où f est diagonalisable (disons dans une base $\mathcal{F}$) à spectre simple, les g commutant avec f sont exactement (analyse-synthèse, les sous-espaces propres de f étant stables par g) les endomorphismes dont la matrice dans $\mathcal{F}$ est diagonale : $\dim(C) = 3$. Dans le cas nilpotent d'indice 3 on se ramène au cas $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour trouver les endomorphismes qui auront dans une bonne base une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$: la dimension vaut 3. Enfin, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$ aura probablement un commutant de dimension 5.

Exercice 86 – Il existe bien entendu (quatre valeurs propres distinctes en dimension quatre) P inversible telle que $A = P\,\mathrm{Diag}(0, 1/3, 2/3, 1)P^{-1}$, et on a alors

$$A^n = P\,\mathrm{Diag}(0, (1/3)^n, (2/3)^n, 1)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\,\mathrm{Diag}(0,0,0,1)P^{-1}.$$

Fallait-il déterminer P et P^{-1} ? Ce n'est pas mortel (par exemple $u(e_2 + e_1/3) = e_2 + e_1/3$, etc...), mais bon...

Exercice 87 – En gardant en tête que $s^2 = \mathrm{Id}_E$, je trouve $\varphi^3 = \varphi$, donc $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de φ. Puisqu'il est scindé à racines simples...

Exercice 88 – On peut établir l'injectivité par un calcul par bloc... ou passer directement à la recherche d'une matrice inverse raisonnable. Inspiré par le calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\sqrt{2}R_{-\pi/4})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}R_{\pi/4} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

j'ai une furieuse envie de considérer $R = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} P & -P \\ P & P \end{pmatrix}$ puis (après vérification), plutôt $R = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1} \\ P^{-1} & P^{-1} \end{pmatrix}$!
Rappelez-vous : en maths, avant de faire des choses subtiles on tente souvent des choses raisonnables qui marchottent, puis qui marchent après coup de tournevis...
On pouvait aussi via un « pivot par bloc » noter que le déterminant de Q vaut $2\det(P)^2 \neq 0$.
Plutôt que de calculer des déterminants par blocs, j'ai commencé par diagonaliser avant d'en déduire le polynôme caractéristique ! Vu la question précédente, le calcul de QBQ^{-1} n'est pas déraisonnable et permet effectivement de conclure. Enfin, sauf erreur, je trouve $\det(K_n) = \dfrac{(2n+1)!}{n+1}\cdot$

Exercice 89 – $X^3 - X - 1$ possède trois racines : l'une est strictement positive, et les deux autres sont des complexes conjugués. On peut alors diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Puisque la trace est nulle, les multiplicités des complexes conjugués sont égales...

Exercice 90 – Compléter x en une base de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la forme des matrices des éléments de E_x dans cette base ?

Exercice 91 – $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ doit convenir. Ensuite, trigonaliser A et regarder la trace (j et son conjugué ont même multiplicité), puis $(A-I)(A^2 - A + I) = 0$ avec $A - I$ inversible. Pour la dernière question, il faut distinguer, selon que $-B$ est ou non dans l'image de $A - I$ (qui n'est pas injectif donc pas surjectif).

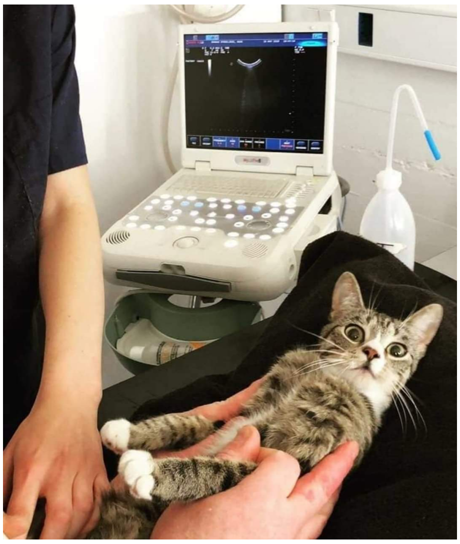
Exercice 92 – Le polynôme annulateur $X(4X^2+2X+1)$ est scindé et ses racines sont simples et de module strictement majorées par 1... Il existe alors k tel que $A^k=0$ (dès que tous les coefficients sont majorés en module par $1/2$).
À la relecture de mon corrigé je réalise qu'on peut aller bien plus loin : en fait A est nécessairement nulle ! Supposons en effet que ce n'est pas le cas, prenons $r>1$ le plus petit entier tel que $A^r=0$ (il est donc $\geqslant 1$) et multiplions $4A^2+2A+I_n$ par A^{r-1}...

Exercice 93 – Il est nécessaire que les valeurs propres soient de module égale à 1, et si la matrice n'est pas diagonalisable alors $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être bornée. Enfin, si A possède une valeur propre non réelle, son conjuguée est également valeur propre, donc A est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\theta} \end{pmatrix}$ donc à $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Je ne sais pas jusqu'où veut aller celui qui a posé l'exercice.

Exercice 94 – Pour l'injectivité, sans indication, je suppose $DB=AD$ et je prends X un vecteur propre de B. Puisque $DBX=ADX=\lambda DX$ et que λ n'est pas vecteur propre de A, cela impose $DX=0$. Mais ceci est vrai sur une base de vecteurs propres (B est diagonalisable) donc $D=0$.

Chapitre 4

Probabilités



4.1 Rappels de cours

Directement du cours :

- Axiomatique des espaces probabilisés ; probabilité d'une intersection décroissante d'événements.
- Formule de Bayes. [PREUVE]
- Lois classiques, avec leur espérance (et variance si possible...).
- Markov, Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres. [PREUVES]
- Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. [PREUVE]
- Somme de Poissons indépendantes. [PREUVE]

Proche du cours :

- Avoir les bons réflexes face à une chaîne de Markov (matrice stochastique, 1 est valeur propre...).
- Loi d'un maximum : $(X \leqslant n) = \cap(X_i \leqslant n)$...
- Espérance d'un cardinal : passer par une somme de variables de Bernoulli dont l'espérance est simple à calculer.

4.2 Posés en 2024

Exercice 95 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre p_1 et p_2 respectivement. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(Y > n)$.
4. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
5. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Exercice 96 – *Mines PSI 2024 [7/10]*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On définit $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = S_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer la loi de $\frac{S_n+n}{2}$. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
2. On pose $A_n = |S_n|$.
   (a) Déterminer $A_n(\Omega)$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir : $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(A_n) + \mathbb{P}(S_n = 0)$.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_{2n-1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$

Exercice 97 – *Mines PSI 2024 [3/10]*

1. Soit $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$. Donner le rayon de convergence puis une expression de S.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G_X = \lambda S$. Déterminer λ et la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 98 – *Centrale PSI 2024 [5/10]*
Un robot appuie sur une diode verte ou rouge à tout instant $n \in \mathbb{N}$. Lorsqu'il appuie sur la diode rouge à l'instant n, il appuie sur la diode verte à l'instant $n+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$, ou sur la diode rouge avec probabilité $1-p$. Lorsqu'il appuie sur la diode verte à l'instant n, il appuie sur la diode rouge à l'instant $n+1$ avec une probabilité $q \in]0,1[$, ou sur la diode verte avec probabilité $1-q$. On note r_n la probabilité que le robot appuie sur la diode rouge à l'instant n, v_n la probabilité que le robot appuie sur la diode verte à l'instant n.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression simple de A^n.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$. Commenter.

Exercice 99 – *Centrale PSI 2024 [9/10]*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $M_n = \mathrm{Max}(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq k) = \big(\mathbb{P}(X_1 \leq k)\big)^n$.
   On suppose l'existence d'un réel $\alpha > 1$ tel que $\mathbb{E}(X_1^\alpha) < +\infty$. On pose $m_\alpha = \mathbb{E}(X_1^\alpha)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_1 \leq k-1) \geq 1 - \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$.

3. Montrer que M_n est d'espérance finie.
4. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{G}(1/2)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(M_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(1 - 2^{-k}\right)^n\right)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Exercice 100 – *CCINP PSI 2024 [4/10]*

1. La matrice $\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
2. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1/2)$. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 101 – *CCINP PSI 2024 [7/10]*
On lance indéfiniment une pièce faisant Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « obtenir deux Pile consécutifs pour la première fois au bout du $n^{\text{ème}}$ lancer » et $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.
2. Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
3. Montrer qu'il est quasi-certain qu'on obtienne deux Pile consécutifs.

Exercice 102 – *Mines MP 2024 [2/10]*
(Celui qui a posé cet exercice n'aimait pas les probas...)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$.

Exercice 103 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*
Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X_k \sim \mathcal{B}(p_k)$. On suppose : $\dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p \in [0,1]$. Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer l'espérance de $\dfrac{S_n}{n}$.
2. Déterminer la limite éventuelle de $\left(\mathrm{Var}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.
3. Montrer :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. Montrer :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 104 – *Mines PSI 2024 [8/10]*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, où p et q sont éléments de $]0,1[$. On pose $U = \dfrac{X}{Y}$.

1. Donner la loi de U.
2. Calculer l'espérance de U.
3. Si $p = q$, montrer que $\mathbb{E}(U) > 1$.

4.3 Posés en colle

Exercice 105 – *Colles 2023/2024 [7/10]*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle qu'il existe M tel que pour tut $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2) \leqslant M$.

1. Montrer que $\sum \mathbb{P}(|X_n| \geqslant n)$ converge.
2. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n>0} \bigcup_{p \geqslant n} \{|X_p| \geqslant p\}\right) = 0$$
3. Interpréter

Exercice 106 – *Colles 2023/2024 [8/10]*
Une marque de céréales édite, dans les mêmes proportions, 4 autocollants différents. On achète un certain nombre de paquets de céréales, qui contiennent tous un autocollant choisi déposé de façon uniforme dans les paquets commercialisés. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boîtes achetées lorsque la collection est complétée pour la première fois.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\mathbb{P}(X > n) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
On pourra adapter la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ pour la réunion de trois puis quatre événements.
2. Donner l'espérance de X.

4.4 Récolte 999

Exercice 107 – *CCP 2016 [7/10]*
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité pour qu'aucun des événements $A_n, ..., A_{n+p}$ est inférieure ou égale à $\exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right)$.
2. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer qu'il est presque impossible [1] qu'il y ait un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

Exercice 108 – *Cachan 2016 [4/10]*
On suppose : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et Y prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. On suppose de plus que X_1, X_2 et Y sont mutuellement indépendantes. On pose $p = \mathbb{P}(Y = -1)$ et on pose : $M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ YX_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité pour que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la probabilité pour que les valeurs propres de M soient réelles.

Exercice 109 – *ENSAM 2017 [8/10]*
On considère un jeu dans lequel un joueur doit répondre à plusieurs questions indépendantes et numérotées. On note p_k la probabilité de répondre juste à la k-ème question, et $r_n = p_1 ... p_n$.

1. Soit X le nombre de bonnes réponses avant le premier échec. Donner la loi de X.
2. Montrer que X possède une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge. Montrer qu'on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n$.

1. Au sens : la probabilité de cet événement est nul.

3. Discuter l'existence d'une espérance pour X et (le cas échéant) la calculer dans les cas suivants :
   (a) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = 1/2$;
   (b) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = 1/k$;
   (c) $p_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $p_k = 1 - 1/k^2$.

4.5 Mais aussi

Exercice 110 – *Mines 2016 [9/10]*
On considère une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre, non nécessairement consécutivement.
2. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre et consécutivement.
3. Soit X la variable aléatoire indiquant le rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer son espérance.

Exercice 111 – *Mines 2016 [7/10]*
Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}\cdot$
2. Donner un équivalent de $P(X = n)$ quand $n \to +\infty$ dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}\cdot$

Exercice 112 – *Points fixes d'une permutation [6/10]*
On munit $\Omega = \mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme (si $A \subset \mathcal{S}_n$, alors $\mathbb{P}(A) = |A|/n!$) et on s'intéresse au nombre moyen $\mathbb{E}(X)$ de points fixes d'une permutation σ :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad X(\sigma) = \mathrm{Card}\left(\{i \in [\![1, n]\!] \,;\, \sigma(i) = i\}\right).$$

On définit par ailleurs, pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la fonction caractéristique de l'événement « $\sigma(i) = i$ » :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad X_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer : $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(\sigma(1) = 1) = \dfrac{1}{n}\cdot$
2. Exprimer X à l'aide des X_i et en déduire l'espérance de X.
3. Calculer la variance de X.

Exercice 113 – *Centrale 2018 [6/10]*
Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.
2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrer : $\dfrac{1}{\mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)\cdot$

4.6 Indications

Exercice 95 – $a=b=0$ ou $|b|>|a|$. Ensuite $(Y>n)=\bigsqcup_{m=1}^{\infty}(X=m \text{ et } Y>m)$ puis $\dfrac{p_1q_2}{1-q_1q_2}$, sauf erreur. Pour la dernière question, je n'ai pas de forme close... On peut éventuellement prolonger l'exercice en faisant montrer que cette probabilité tend vers $1/2$.

Exercice 96 – On se ramène de façon classique à une binomiale, puis $\mathbb{E}(S_n)=0$ et $\mathrm{Var}(S_n)=n$. Ensuite $S_n(\Omega)=\{-n,-n+2,...,n-2,n\}$ (contient 0 si et seulement si n est pair), puis $A_n(\Omega)=\{n,n-2,...\}$ (entiers positifs majorés par et de même parité que n) : ça termine à 0 si n est pair ; 1 sinon. On a ensuite pour $k>0$: $\mathbb{P}(A_{n+1}=k)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(A_n=k-1)+\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(A_n=k+1)$... ce qui conduit en sommant les $k\mathbb{P}(A_{n+1}=k)$ à la formule de récurrence sur les espérances... sauf que non si on est honnête : il manque un terme $\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(A_n=0)$.

En fait la relation vue plus haut n'est valable que pour $k\geqslant 2$, car $\mathbb{P}(A_{n+1}=1)=\mathbb{P}(A_n=0)+\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(A_n=2)$: on a retrouvé le terme qui manquait !

Exercice 97 – $n^2+n+1=n(n-1)+2n+1$, puis $S(t)=(t+1)^2\mathrm{e}^t$. Puisque $G_X(1)=1$, on trouve $\lambda=\dfrac{1}{4\mathrm{e}}$ puis $\mathbb{E}(X)=G_x'(1)=2$. Je vous laisse calculer

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)^2=G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2...$$

Exercice 98 – Probabilités totales en conditionnant sur la diode au temps n : $A=\begin{pmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique se factorise bien, permettant d'appliquer la technique efficace de la division euclidienne de X^n... Les limites trouvées seront comparées aux résultats au bord (à la physicienne) : lorsque $p=q$, lorsque p est proche de 1 mais pas q...

Exercice 99 – On contrôle $\mathbb{P}(X_1\geqslant k)=\mathbb{P}(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)$ par Markov. Ensuite, l'existence d'une espérance est équivalente à la convergence de $\sum\mathbb{P}(M_n\geqslant k)$ dont le terme général est équivalent (en k) à $\dfrac{nm_\alpha}{k^\alpha}$, et on se souvient que $\alpha>1$.
Sauf si je suis passé à coté de quelque chose, la dernière question est fine. Déjà, une comparaison somme-intégrale nous assure que $\mathbb{E}(M_n)\sim\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{2^x}\right)^n\right)dx$, elle-même égale ($u=1-\frac{1}{2^x}$) à $\dfrac{1}{\ln 2}\displaystyle\int_0^1\frac{1-u^n}{1-u}du$. On écrit le quotient comme une somme, qu'on intègre, et on voit apparaître une somme harmonique.

Exercice 100 – Si $X_2=X_3$ alors la matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. Sinon : si $X_1=X_4$ alors elle n'est pas diagonalisable (première question), et elle l'est si $X_1\neq X_4$ (deux valeurs propres distinctes). Bref, elle est diagonalisable sauf si $(X_2,X_3)=(0,1)$ ou $(1,0)$ et $(X_1,X_4)=(0,0)$ ou $(1,1)$. Elle est donc diagonalisable avec probabilité $1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$.

Exercice 101 – Les premières valeurs sont $0,p^2,p^2q,p^2q$ et en conditionnant sur le premier lancer (puis éventuellement le deuxième) : $a_{n+2}=qa_{n+1}+pqa_n$. Si on note x_1 et x_2 les deux racines distinctes du polynôme caractéristique, on trouve $a_n=\alpha(x_1^n-x_2^n)$ avec $\alpha=\dfrac{p^2}{x_1-x_2}$, puis

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha\left(\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}\right)=\alpha\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{p^2}{1-q-pq}=\frac{p^2}{p(1-q)}=1$$

(on a exploité à la fin : $x_1x_2=-pq$ et $x_1+x_2=q$)

Exercice 102 – Je trouve $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$ et $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda^2}\cdots$

Exercice 103 – $\mathrm{Var}(S_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(p_i - 1) = O(1/n)$ (c'est ce qui sera utile). Ensuite : Markov. Et enfin on choisit N tel qu'au delà de cet entier $\left|\dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n} - p\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, de sorte que pour de tels n on a

$$\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$$

Exercice 104 – Lorsque la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible, l'événement $U = \dfrac{X}{Y}$ est la réunion disjointe des événements ($X = na$ et $Y = nb$) pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui conduit à la formule modérément sympa :

$$\mathbb{P}\left(U = \frac{a}{b}\right) = \frac{pq}{(1-p)(1-q)} \frac{(1-p)^a(1-q)^b}{(1-(1-p)^a)\,(1-(1-q)^b)}.$$

C'est plutôt moins technique pour la suite où on trouve (transfert, $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ étant dénombrable, on somme ces choses positives... ce qui nécessite plus ou moins de soin selon l'humeur/le tempérament de la personne qu'on a en face de soi) $\mathbb{E}(U) = \dfrac{q}{p} \times \dfrac{-\ln q}{1-q}$, et pour $p = q$ on pense à l'inégalité de convexité $\ln(1+u) < u$ pour $u \neq 0$ (par **stricte** convexité) qui donne ici $\ln(q) < q - 1$ puis $\dfrac{\ln q}{q-1} > 1$ (puisque $q - 1 < 0$).

Exercice 105 – Markov. Continuité décroissante, sous-additivité, reste de suite convergente.
En passant au complémentaire : presque surement il existe un rang au delà duquel on a toujours $|X_n| \leqslant n$.
Mouais...

Exercice 106 – Il s'agit de montrer/admettre la « formule du crible » (ici pour 3 événements) :

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \sum_i \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Ensuite on prend E_i l'événement : « la vignette numéro i n'a pas été trouvée dans les n premières boîtes ».
On temine avec $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$, pour trouver (il me semble) $\mathbb{E}(X) = 16 - 12 + 16/3$.

Exercice 107 – Voir l'exercice précédent ; on évalue ici l'événement $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}$.

Exercice 108 – Déjà, M est symétrique réelle avec probabilité $1-p$. Il reste ensuite à estimer la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ -X_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable (resp. : à spectre dans $\mathbb{R}$) ; il me semble que c'est la même condition, à savoir : $X_2 = 0$ (sinon, le polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle).

Exercice 109 – $\mathbb{P}(X \geqslant k) = r_k$ et $\mathbb{P}(X = k) = r_k - r_{k+1}$. Il faut ensuite démontrer un résultat fin (il est dans le cours, mais je pensais la démonstration hors programme...) : une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède une espérance si et seulement si $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ est convergente. Après avoir écrit $(X \geqslant k) = (X = k) \cup (X \geqslant k+1)$, on prouve :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k) - n\mathbb{P}(X \geqslant n+1).$$

- si $\sum \mathbb{P}(X \geqslant n)$ est convergente alors les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\limits_n n\mathbb{P}(X = n)$ sont majorées, donc la série converge (et dans un deuxième temps la suite $(nP(X \geqslant n+1))$ converge aussi, puis vers 0 ; pourquoi ?).
- si X possède une espérance : il s'agit de montrer que $nP(X \geqslant n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On écrit pour cela :

$$0 \leqslant n\mathbb{P}(X \geqslant n+1) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k),$$

  et le membre de droite converge vers 0 (reste d'une série convergente).

La suite de l'exo est assez banale. Dans les deux premiers cas Y possède pour espérance 1 puis e, et dans le troisième cas Y n'a pas d'espérance ($r_n = \frac{n+1}{2n}$, si j'ai correctement collisionné...).

Exercice 110 – C'est du dénombrement. Il y a déjà $(2n)!$ tirages possibles. Pour la première expérience, on dénombre les succès en choisissant les n positions des impairs ($\binom{2n}{n}$ possibilités ; la position de chaque impaire est alors imposée) puis on distribue les paires dans les n cases qui restent : $n!$ possibilités : $p_1 = \frac{\binom{2n}{n} n!}{(2n)!}\cdot$ Pour la deuxième question, on choisit la position $p \in [\![1, n+1]\!]$ de la première boule impaire, ce qui impose la position de toutes les autres. Il reste à positionner les n numéros paires dans les n cases qui restent : $p_2 = \frac{(n+1)n!}{(2n)!}\cdot$

La dernière question est difficile. Déjà, je préfère évaluer Y la position de la première boule impaire (et la loi de X est bien entendu celle de $2n+1-Y$; si vous ne comprenez pas pourquoi ou que vous trouvez ça limite-limite, vous pouvez raisonner directement sur X). Or donc, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ on peut évaluer $\mathbb{P}(Y = k)$ soit par dénombrement soit par probabilité composées. Je trouve $\mathbb{P}(Y = k) = n\frac{n!(2n-k)!}{(2n)!(n-k+1)!}\cdot$ Il s'agit ensuite de calculer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} (2n+1-k)\mathbb{P}(Y = k) = n\frac{n!^2}{(2n)!}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{2n+1-k}{n}$$

Sans Python (et le module `fractions`) j'aurais laissé tombé, mais le résultat semblait simple : $\frac{n(2n+1)}{n+1}\cdot$

C'est alors que j'ai pensé à une relation qu'il est inenvisageable qu'un taupin λ connaisse : $\sum_{i=r}^{s}\binom{i}{r} = \binom{s+1}{r+1}$ (dessiner le triangle de Pascal et plisser les yeux vous permettra de voir que c'est en fait facile par récurrence sur s)... et cette relation permet effectivement de trouver ce résultat.

Notons enfin qu'il est normal que l'espérance de Y (qui vaut $2n+1-\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{n+1}$) soit strictement plus petite que 2 : on pourra penser à une expérience ou on remettrait les boules déjà tirées dans l'urne ; le temps d'attente de la première impaire suit une loi géométrique de paramètre $1/2$, donc d'espérance 2. Or dans l'expérience de l'exercice, on ne remet pas les boules, donc la première impaire arrivera plus vite.

Exercice 111 – Il s'agit d'abord de justifier que $t \mapsto \frac{1}{(2-t)^\alpha}$ est développable en série entière au moins sur $[-1, 1]$, que les coefficients de son développement sont positifs et de somme 1. Mais le cours sur les séries entières nous dit qu'effectivement la fonction en jeu est développable sur $]-2, 2[$, et que les coefficients sont égaux à $\frac{(-1)^n}{2^\alpha 2^n}\binom{n}{-\alpha}$; et comme $\binom{n}{-\alpha} = (-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}$, les coefficients sont effectivement positifs. Ils sont de somme 1 en évaluant la série entière en $1 \in]-2, 2[$. Le calcul d'équivalent via Stirling me semble complètement absurde... Je trouve $\mathbb{P}(X = n) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{2^\alpha n!(\alpha-1)!}$ (sans garantie !). Pour la dernière question, je suggère non pas Markov... mais Tchebychev, en évaluant la variance via une formule utilisant $\mathcal{G}_X$ et ses dérivées... que vous retrouverez !

Exercice 112 – Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(\sigma(i) = i) = \frac{1}{n}$ (dénombrement), or $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donc, même si ces variables ne sont pas indépendantes, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{n} = 1$.

Exercice 113 – La variable aléatoire $\frac{1}{X}$ est bornée donc possède une espérance ! L'inégalité proposée reste vraie assez généralement via Cauchy-Schwarz, mais dans le cas présent on peut calculer : $\mathbb{E}(1/X) = -\frac{p}{q}\ln(1-q)$, et on sait que $\ln(1-q) \leqslant -q\dots$

Chapitre 5

Interlude : diverses choses

5.1 Posés en 2025

Exercice 114 – *Mines PSI 2024 [6/10]*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f.

Exercice 115 – *Centrale MP 2024 [8/10]*

1. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable et admettant en a et b une même limite finie.
2. On définit la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.
   (a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
   (b) Quel est le degré de P_n ?
   (c) Que dire du nombre de zéros de $f^{(n)}$?

Exercice 116 – *IMT PSI 2024 [5/10]*
On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(*)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

1. Soit f vérifiant $(*)$.

(a) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(x+1)$.

(b) Montrer que f' est constante.

2. Donner toutes les solutions du problème posé.

5.2 Mais aussi

Exercice 117 – *Mines 2010, 2011, ..., 2024 [2/10]*
Aujourd'hui nous sommes le lundi 1er juillet 2024. Quel jour serons-nous le 1er juillet 2025 ?

C'est complètement nul de poser ça à un oral de maths... mais bon, toute personne qui passe les oraux des mines doit y avoir réfléchi le matin en prenant son petit-déjeuner.

Exercice 118 – *Mines 2017 [6/10]*
Soit $p \in]0,1[$. Montrer :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |y^p - x^p| \leqslant |y-x|^p$$

Exercice 119 – *X PC 2021 [8/10]*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier $(S_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.
2. Dans le cas général, donner une condition nécessaire et suffisante simple sur f pour que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 120 – *Mines 2016 [2/10]*

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$.
2. En déduire : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^t < \mathrm{e}^x < \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Exercice 121 – *[1/10]*
Résoudre l'équation $3^x + 4^x = 5^x$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 122 – *Centrale 2018 [4/10]*
Définissons, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\cosh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$, $\sinh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$, et $\mathrm{th}(z) = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$.

1. Déterminer le domaine de définition de th.
2. Résoudre $\mathrm{th}(z) = 0$.
3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|\mathrm{Im}\,(z)| < \dfrac{\pi}{2}$ et $|\mathrm{th}(z)| < 1$.

Exercice 123 – *Mines 2018 [4/10]*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les racines multiples de P' sont aussi racines multiples de P.
3. Déterminer le signe de $PP'' - P'^2$.

Exercice 124 – *Mines PC 2022 [5/10]*
Dénombrer les fonctions $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

5.3 Indications

Exercice 114 – Suposons qu'il y en ait un nombre fini, et que X soit le dernier. La fonction f est continue sur le segment $[0, X]$ donc possède un minimum m et un maximum M. Il existe alors a et b tels que $f(a) = m - 1$ et $f(b) = M + 1$, avec fatalement m et M strictement plus grands que X. Un petit coup de TVI, après avoir noté que $f(a) < y < f(b)$, nous fournira une contradiction.

Exercice 115 – Il s'agit de traiter disons deux cas : lorsque a et b sont finis, puis lorsque au moins l'un des deux est infini. On peut singer la preuve de Rolle avec l'existence d'un maximum (après s'être ramené à un segment) et d'un minimum, et d'éliminer le cas où il est pris/approché aux bords. Sinon on peut ruser... Par exemple dans le cas $]a, +\infty[$ avec a fini, on peut considérer $g : x \mapsto f(\tan x)$ sur $]\mathrm{Arctan}(a), \pi/2[$ prolongée à $[\mathrm{Arctan}(a), \pi/2]$...
Ensuite, on applique Rolle généralisé à f, fournissant une racine à f' sur $]-1, 1[$. Mais comme par ailleurs f' tend vers 0 en ± 1, on peut appliquer deux fois Rolle, fournissant deux racines à f'' ; « etc ».

Exercice 116 – On a $f'(x+1) + f'(x) = f(x+2) - f(x) = 2f'(x)$... Ensuite, f' est dérivable et $f''(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0$.
Il reste à faire la synthèse : les fonctions affines sont-elles solutions au problème ? Oui.

Exercice 117 – Pour 2026 ce sera un mercredi...

```
stephane@fumseck:~$ cal 2026
                            2026
      Janvier               Février               Mars
di lu ma me je ve sa  di lu ma me je ve sa  di lu ma me je ve sa
             1  2  3   1  2  3  4  5  6  7   1  2  3  4  5  6  7
 4  5  6  7  8  9 10   8  9 10 11 12 13 14   8  9 10 11 12 13 14
11 12 13 14 15 16 17  15 16 17 18 19 20 21  15 16 17 18 19 20 21
18 19 20 21 22 23 24  22 23 24 25 26 27 28  22 23 24 25 26 27 28
25 26 27 28 29 30 31                        29 30 31


       Avril                  Mai                   Juin
di lu ma me je ve sa  di lu ma me je ve sa  di lu ma me je ve sa
          1  2  3  4                  1  2      1  2  3  4  5  6
 5  6  7  8  9 10 11   3  4  5  6  7  8  9   7  8  9 10 11 12 13
12 13 14 15 16 17 18  10 11 12 13 14 15 16  14 15 16 17 18 19 20
19 20 21 22 23 24 25  17 18 19 20 21 22 23  21 22 23 24 25 26 27
26 27 28 29 30        24 25 26 27 28 29 30  28 29 30
                      31

      Juillet                 Août               Septembre
di lu ma me je ve sa  di lu ma me je ve sa  di lu ma me je ve sa
          1  2  3  4                     1         1  2  3  4  5
 5  6  7  8  9 10 11   2  3  4  5  6  7  8   6  7  8  9 10 11 12
12 13 14 15 16 17 18   9 10 11 12 13 14 15  13 14 15 16 17 18 19
19 20 21 22 23 24 25  16 17 18 19 20 21 22  20 21 22 23 24 25 26
26 27 28 29 30 31     23 24 25 26 27 28 29  27 28 29 30
                      30 31
```

Exercice 118 – Il s'agit de montrer que pour tout $\lambda > 1$, $\lambda^p - 1 \leqslant (\lambda - 1)^p$, ou encore : pour tout $\mu \geqslant 0$, $(1 + \mu)^p \leqslant 1 + \mu^p$. Ce dernier point de vue est « le » bon : une simple étude de la fonction différence fera l'affaire.

Exercice 119 – Dans le cas particulier on a $f(t) \sim t$ donc on peut être tenté de remplacer $f(k/n^2)$ par k/n^2, et on trouve alors : $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1/2$. Pour prouver ce résultat, on peut par préciser l'équivalent vu plus haut en disant que d'une part $f(t) \leqslant t$, et d'autre part $t \in [0, 1/n]$ $\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \leqslant S_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ et puisque $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ on obtient par gendarmisation : $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1/2$.
Dans le cas général, on obtient assez naturellement la condition nécessaire de convergence $f(0) = 0$ (à prouver soigneusement tout de même). Elle est également suffisante, et on peut le montrer en contrôlant $\dfrac{f(t)}{t}$ par la dérivée de f sur $[0, t]$. Plus précisément si on note respectivement m_t et M_t le minimum et le maximum de f' sur $[0, t]$ alors le théorème des accroissements finis nous assure que pour tout $x \in [0, t]$, $x m_t \leqslant f(x) \leqslant x M_t$. On a alors $m_{1/n} \frac{n+1}{2n} \leqslant S_n \leqslant M_{1/n} \frac{n+1}{2n}$ et il reste à conclure soigneusement !

Exercice 120 – De simples études de fonctions (attention quand même à la STRICTE monotonie pour établir des inégalités strictes) montrent que pour $u > 0$, $\ln(1 + u) < u$ (puis on l'applique à $u = 1/t$) et : $(t+1) \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) > 1$. On applique ceci à $t = y/x$, puis on utilise la stricte croissance de $u \mapsto u^x$ sur $[1, +\infty[$ quand $x > 0$.

Exercice 121 – Beuhhhh... on a découvert en classe de quatrième que $3^2+4^2=5^2$. Et on l'a redécouvert tous les ans depuis. Bref, on dispose d'une première solution. Ensuite, l'application $x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ me semble strictement décroissante donc injective...

Exercice 122 – $\operatorname{th}(z)$ est défini sauf quand z est de la forme $i(k\pi+\pi/2)$. De même, $\operatorname{th}(z)=0$ si et seulement si z est de la forme $ik\pi$. Pour l'inégalité, elle est déjà vraie lorsque z est un réel, et via $|Z|^2 = Z\overline{Z}$, je trouve qu'elle est vraie pour tous les complexes de partie imaginaire dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 123 – Utiliser d'une part Rolle et d'autre part la caractérisation de la multiplicité des racines (ou la retrouver). Ensuite, $PP''-P'$ est du signe de la dérivée (entre deux racines de P) de $\frac{P'}{P}(x) = (\ln|P|)'(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_i}{x-x_i} \cdots$

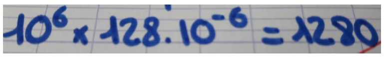
Exercice 124 – Tous les habitants de « l'image » $f([\![1,n]\!])$ sont envoyés sur eux-mêmes. On peut choisir d'abord $k \in [\![1,n]\!]$ le cardinal de l'image, puis l'image. Il reste alors à envoyer comme on veut les $n-k$ autres éléments de $[\![1,n]\!]$ individuellement sur les habitants de l'image, soit un nombre total de :

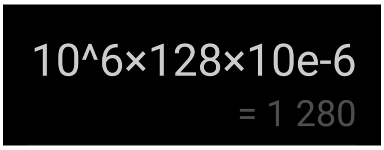
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$$

Bonus : dénombrer les f telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$!

Chapitre 6

Suites et séries de fonctions – séries entières





6.1 Rappels de cours

- Différents modes de convergence des suites et séries de fonctions. [DÉFINITIONS]
- La convergence normale implique la convergence uniforme.
- Théorèmes de régularité pour les limites de suites de fonctions (resp. sommes de séries de fonctions).
- Savoir appliquer tout cela à $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
  Non mais vraiment ! Vérifiez que vous savez effectivement faire.
- Rayon de convergence. [DÉFINITION] Savoir les calculer en pratique (et pas forcément via d'Alembert !)
- Pour quels $r \geqslant 0$ la suite $\left(\frac{n^2}{3^n} r^n\right)$ est-elle bornée ?
- Convergence absolue dans le disque ouvert ; normale sur $[-A, A]$ si $A < R$. [PREUVE]
- Régularité des sommes de séries entières.
- Développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$. [PREUVE]
- Rayon de convergence de la série entière dérivée (resp. primitivée).

6.2 Posés en 2025

Exercice 125 – *Mines PSI 2024 [8/10]*

Soit $F :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{e}^{-xt} dt\,.$

1. Déterminer le domaine de définition I de F.
   Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donner son sens de variation.
2. Déterminer les limites de F aux bornes de I.
3. Calculer $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-xt} dt$ pour $x > 0$.

4. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{6}{x^4}\cdot$

Exercice 126 – *IMT PSI 2024 [6/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)^n} dt.$

1. Montrer que (a_n) est bien définie.
2. Étudier la limite de (a_n).
3. Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 127 – *Mines PSI 2024 [4/10]*
Soient $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt.$

1. Déterminer le rayon de convergence de f et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
2. Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut F' ?
3. Montrer que F est développable en série entière et déterminer ce développement.

Exercice 128 – *Centrale PSI 2024 [7/10]*
Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{1+\sin(2\pi n x)}{1+n^2x^2}\cdot$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$?

   Soient $\varepsilon > 0$ fixé, $A_n = f_n^{-1}\big([\varepsilon, +\infty[\big)$ et $u_n = \mathbf{1}_{A_n}$.
2. Tracer le graphe de f_5 et en déduire que u_5 puis u_n est continue par morceaux.
3. Montrer que la suite (u_n) converge simplement et donner sa limite.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} u_n = 0.$

Exercice 129 – *Centrale PSI 2024 [3/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \mapsto \dfrac{e^{-nt^2}}{n^2}\cdot$

1. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 130 – *Mines PSI 2024 [8/10]*
Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$.

1. À quelle condition nécessaire la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{f(k)}$ est-elle convergente ? Cette condition est-elle suffisante ? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
2. On suppose de plus que f est croissante à partir d'un certain rang.
   On pose $u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{f(k)}$. Déterminer le signe de u_n et la limite de la suite (u_n).
3. On suppose également que, pour tout k assez grand, $\dfrac{1}{f(k)} + \dfrac{1}{f(k+2)} \geq \dfrac{2}{f(k+1)}$.
   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 131 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S en fonction de a.
   On suppose pour toute la suite que $|a| < 1$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Exprimer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ pour $x > 0$.
4. Trouver un équivalent de S en 0.
5. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
6. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 132 – *CCINP PSI 2024 [9/10]*
On pose $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et g.
2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
4. Montrer que f est continue sur $]-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1.
5. Trouver un équivalent de g, puis de f, en 1^-.

6.3 Posés en colle

Exercice 133 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^3 x^3}$.

1. Étudier la convergence simple puis normale (sur $\mathbb{R}^+$) de $\sum f_n$.
2. Établir la convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 134 – *Colles 2023-2024 [8/10]*
On considère quand c'est défini :

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}.$$

1. Donner le domaine de définition de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence normale sur ce domaine.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 135 – *Colles 2023-2024 [4/10]*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$.
Bonus : étudier la somme aux bords de l'intervalle...

Exercice 136 – *Colles 2023-2024 [7/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
On définit $t_n = \mathrm{tr}(A^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Expliciter une relation entre A^3, A^2, A et I_n.
2. Donner un encadrement des valeurs propres de A.
3. Expliciter une relation entre t_n, t_{n-1}, t_{n-2} et t_{n-3}.
4. Donner le rayon de convergence de $\sum t_n z^n$ et expliciter la somme.

Exercice 137 – *Colles 2023-2024 [7/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$.

1. Calculer $a_{n+2} + a_n$.
2. En déduire (avec la monotonie de (a_n) un équivalent simple de a_n quand n tend vers l'infini.
3. Donner le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
4. Calculer la somme de cette série entière.

Exercice 138 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
Calculer :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k(k+1)}.$$

6.4 Récolte 999

Exercice 139 – *CCP 2016 et 2018 (deux fois) [8/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$.

1. Donner le domaine de convergence.
2. La convergence est-elle normale sur l'ensemble de définition ?
3. Montrer que F est continue sur son domaine de définition.
4. Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 140 – *CCP 2018 [3/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $f_n : x \in [-1, 1] \mapsto \sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

1. Montrer la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers F qu'on explicitera.
2. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, 1]$.
3. A-t-on convergence uniforme sur $[-1, 1]$?

Exercice 141 – *Centrale 2017 [8/10]*

1. On suppose que (a_n) est à termes strictement positifs, avec $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o(1/n)$, avec $\alpha > 0$.
   Montrer que $\sum a_n$ converge.
   Indication : fixer $\beta \in]1, \alpha[$, et montrer que la suite $(n^\beta a_n)$ est ultimement décroissante...

2. Donner le développement en série entière (avec son rayon et domaine de convergence) de $x \mapsto \sqrt{1-x}$.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$, et vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n x^n$ (lorsque c'est défini).
   (a) On suppose que le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$ est strictement positif. Donner la valeur de $f(x)$ sur $]-R, R[$.
   (b) Réciproquement, montrer que la fonction trouvée plus haut est effectivement développable en série entière.
   (c) Conclure.

6.5 Mais aussi

Exercice 142 – *Mines 2016 [7/10]*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Soient $x \in]-1, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Simplifier $\prod_{n=0}^{N} (1 + x^{2^n})$.
3. Expliciter f.

Exercice 143 – *CCP 2016 [2/10]*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{(-1)^n}$.

1. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
2. Exprimer la somme de cette série entière sur son intervalle de définition à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 144 – *Centrale 2018 [8/10]*

On pose, pour $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}$ puis $\Phi_n : x \geqslant 0 \mapsto \int_0^x f_n(t)dt$.

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe un unique $x_n(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ tel que $\Phi_n(x_n(\alpha)) = \alpha$.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n(\alpha))_{n\geqslant 0}$ si $\alpha > \mathrm{e} - 1$.
4. Même question si $\alpha < \mathrm{e} - 1$.

Exercice 145 – *Mines 2018 [5/10]*

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.

Exercice 146 – *Mines 2018 [8/10]*
On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence strictement positif, de somme notée $f(z)$. On suppose qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes non nuls convergeant vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0$.
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Exercice 147 – *Mines 2018 [5/10]*

Soit $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}(t)}{t^2} dt$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ puis étudier la convergence aux bornes du domaine.

6.6 Indications

Exercice 125 – Sans problème au début (travailler sur $[\varepsilon, M]$ ou $[\varepsilon, \infty[$ pour le caractère $\mathcal{C}^1$). La limite de F en $+\infty$ se traite assez bien (en passant ou non par des suites, par convergence dominée), mais je trouve que c'est plus fin en 0 : j'ai minoré $F(x)$ par l'intégrale sur $[0, 1/x]$, sur laquelle on peut minorer l'intégrande par $\mathrm{e}^{-1}\dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}$ pour obtenir la limite infinie. Pour montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(x) \sim G(x)$ j'ai majoré la différence en utilisant : $\left|1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}\right| \leqslant \dfrac{u}{2}$ pour $u > 0$ (IAF).

Exercice 126 – CVD, par exemple en dominant par $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2/2}$. Série alternée. Le caractère borné assure que le rayon est minoré par 1. Si on prend $r > 1$, $(a_n r^n)$ est-elle bornée ? En prenant $x > 0$ tel que $\mathrm{ch}(x) = r/2$ on a alors $a_n r^n \geqslant 2^n x$...

Exercice 127 – $xf(x) = \mathrm{e}^x - 1$ sur $\mathbb{R}$. On peut ensuite intégrer terme à terme un développement en série entière, le rayon étant infini (produit de Cauchy). Ce développement dont l'existence est prouvée via un produit de Cauchy... se calcule plutôt en dérivant :

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!} x^n \right)'$$

Exercice 128 – (f_n) converge simplement vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$, la convergence étant non uniforme (sans quoi la limite serait continue). f_5 oscille entre 0 et le double d'un machin qui décroît vers 0, et u_n nous montre les réels envoyés au dessus de ε par f_n : c'est une réunion finie de segments, et u_n est donc une brave fonction en escaliers donc continue par morceaux. On a même $u_n(x) = 0$ dès que $\dfrac{2}{1+nx^2} < \varepsilon$ c'est-à-dire $x^2 > \dfrac{1}{n}(2/\varepsilon - 1)$, ce qui donne la convergence simple vers 0 (fixer x_0 : il existe n tel que...). Il y a enfin convergence dominée vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$: on peut dominer par $\mathbf{1}_{[0,1]}$ pour peu que n soit assez grand (disons : plus grand que $2/\varepsilon - 1$).

Exercice 129 – Il me semble que $\|f_n'\|_\infty = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{1/2}}{n^{3/2}}$.

Exercice 130 – La condition nécessaire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'est pas suffisante : prendre f égale à n^2 lorsque n est pair, et n lorsque n est impair (en faisant en sorte qu'elle tende vers $+\infty$: faites un dessin plutôt que d'écrire des formules mystérieuses). Si f est en plus croissante, le critère gnagna s'applique : il donne la convergence mais aussi le signe de u_n : c'est celui de $(-1)^n$. Et bien entendu on a $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Maintenant, $\sum u_n$ est alternée et son terme général tend vers 0. Si seulement cela pouvait être en décroissant en valeur absolue... Ce qui reviendrait à avoir $\delta_n = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} \geqslant 0$ pour tout n. Or :

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{f(k)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{f(k)} = \frac{1}{f(n)} - \frac{2}{f(n+1)} + \frac{2}{f(n+2)} - \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{f(n+2i)} - \frac{2}{f(n+2i+1)} + \frac{1}{f(n+2i+2)} \right)}_{\geqslant 0} \end{aligned}$$

(oui... regardez bien la somme « avec des petits points », la preuve formelle passant par une somme partielle).

Exercice 131 – Dans les cas où $|a| > 1$ ou $a = 1$, le domaine de définition est vide. Sinon c'est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (série alternée, ou convergence absolue dans le cas $|a| < 1$). Ensuite, convergence normale sur $[\varepsilon, +\infty[$. La relation $S(x+1) = \dfrac{S(x)}{a} - \dfrac{1}{x}$, une fois retournée, donne $S(x) = aS(x+1) + \dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ en 0^+ puisque S

est continue en 1. Par double-limite (convergence uniforme sur $[1,+\infty[$), $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, on peut également double-limiter sur $xS(x)$ pour trouver finalement : $S(x) \sim \dfrac{1}{1-a}\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 132 – Début assez standard, avec $(1-x)f(x) = g(x)$, convergence uniforme de la série définissant g sur $[-1,0]$ par contrôle du reste d'une série alternée, puis : $f(x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} \dfrac{g(-1)}{2}\cdot$
Ça me semble beaucoup plus compliqué en 1 : j'ai fait une comparaison somme-intégrale, qui donne assez douloureusement (via un changement de variable du type : $y = -x\ln(1-u)$) : $g(1-u) \sim \dfrac{-\ln(u)}{u}$, puis évidemment $f(1-u) \sim \dfrac{-\ln(u)}{u^2}\cdot$

Exercice 133 – Attention, chaque f_n est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/n\}$. En dehors des réels de la forme $-1/n$ il y a bien convergence absolue. Ensuite les variations de la f_n (qui est impaire, au passage), nous disent que le maximum est pris en $1/n$, ce qui donne à la fois $\|f_n\|_\infty \sim K/n$, fournissant la non-convergence normale sur $\mathbb{R}$, mais aussi $\|f_n\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = f_n(\alpha)$, fournissant la convergence normale sur $[\alpha,\beta] \subset]\,,+\infty[$.

Exercice 134 – Je trouve $\|f_n\|_\infty = f_n(1/n) = \dfrac{1}{n\ln(n)\mathrm{e}}$, donc il n'y a pas convergence normale. Cependant, la majoration

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant x\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln k} \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

permet d'obtenir : $\|R_n\|_\infty = O(1/\ln(n))$.

Exercice 135 – Il est intéressant de bien distinguer les cas $\alpha > 1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ puis $\alpha \in]0,1[$. Et enfin $\alpha < 0$ par comparaison somme-intégrale. On trouve toujours $R = 1$.

Exercice 136 – Cayley et Hamilton doivent aider. Il me semble que le polynôme caractéristique s'étudie facilement (au sens : étude de fonction), fournissant trois valeurs propres vérifiant $-2 < \lambda_1 < -1$, et $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3 < 2$ (on doit pouvoir trouver sans calculatrice qui de $|\lambda_1|$ et λ_3 est le plus grand...). La trace appliquée à la relation polynômiale donne une relation de récurrence d'ordre 3 pour (t_n) ; une fois multipliée par t^n puis sommée, ma foi... Comme d'habitude, on obtient une minoration du rayon de convergence plus facilement que sa valeur exacte.

Exercice 137 – Il me semble que $a_{n+2} + a_n = \dfrac{1}{n+1}$, et par ailleurs $2a_{n+2} \leqslant a_{n+2} + a_n \leqslant 2a_n$, « donc » $a_n \sim \dfrac{1}{2n}$, et le rayon de convergence demandé vaut donc 1. Ensuite il me semble que si on note $f(x)$ la somme, alors

$$x^2 f(x) + (f(x) - (a_0 + a_1 x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2} + a_n)x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1} = -x\ln(1-x)$$

Exercice 138 – Pour calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ (et trouver $x - (x-1)\ln(1-x)$) je dériverais volontiers une ou deux fois, selon qu'on reconnaît ou pas le développement en série entière de $\ln(1-x)$... La somme recherchée vaut finalement $1 - \ln(2)$.

Exercice 139 – Il y a convergence normale sur $[-A,A]$ (mais pas sur $\mathbb{R}$: regarder $f_n(n)$). À n fixé, on a $\dfrac{f_n(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^2}$ quand x tend vers 0, et on a alors sans problème (majoration de la différence, ou double-limite)

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad (= \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6})$$

Ensuite, toujours à n fixé, on a $f_n(x) \sim \dfrac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. La série $\sum \frac{1}{x}$ étant divergente, on évalue alors plutôt $f(x)$ par une comparaison somme/intégrale, qui donne : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 140 – $f_n(1/n) = ?$ Pour $x \in [a,1]$, on a $0 \leqslant nx\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant n\mathrm{e}^{-na^2}$...

Exercice 141 – Notant $b_n = n^\beta a_n$, on trouvera $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \dfrac{\beta - \alpha}{n} + o(1/n)$... Le reste me semble très proche du cours. On trouvera $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ puis $u_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ (de mémoire !).

Exercice 142 – Il y a divergence grossière pour $|x| \geqslant 1$, et $f_n(x) = o(1/2^n)$ sinon. Ensuite, le calcul pour $N = 2$ voire $N = 3$ risque de donner une idée du résultat, et enfin les sommes partielles ressemblent à des dérivées de logarithmes de produits partiels, non ? Finalement, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot$

Exercice 143 – $r^n/2 \leqslant a_n r^n \leqslant 2r^n$, donc $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$, ce qui donne le rayon. Il y a par ailleurs divergence en ± 1. Enfin, en cassant la somme $S(x)$ en deux : $S(x) = \dfrac{2 + x/2}{1-x^2}\cdot$
On peut facilement vérifier la vraisemblance avec un DL à l'ordre 3 : plus un ou deux points à la note !

Exercice 144 – Pour la troisième question (et la suivante) on a évidemment $\mathrm{e} - 1 = \displaystyle\int_0^1 f$, avec f la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; j'ai alors imaginé le graphe de f_{1000} puis de Φ_n (très peu croissante au voisinage droit de 1 pour me convaincre que $x_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Je l'ai montré en fixant $A > 1$: $\Phi_n(A) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 1 < \alpha$, donc à partir d'un certain rang, $\Phi_n(A) < \Phi_n(x_n(\alpha))$ donc $A < x_n(\alpha)$. Pour la dernière question, je fixe K tel que $\alpha = \displaystyle\int_0^K \mathrm{e}^t dt$ (j'imagine que $K = \ln(1+\alpha)$ doit convenir...). On a alors $\displaystyle\int_0^K f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha = \int_0^{x_n(\alpha)} f_n$ donc $\displaystyle\int_K^{x_n(\alpha)} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il reste à minorer la valeur absolue de cette intégrale par $\dfrac{|x_n(\alpha) - K|}{2}$ pour conclure. que $x_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} K$.

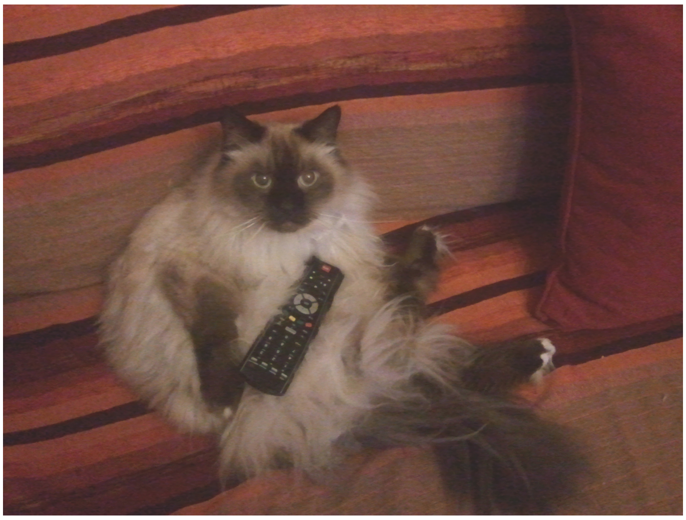
Exercice 145 – La convergence de $\sum f_n$ (ainsi que $\sum f_n'$) est normale donc uniforme sur $[-A, A]$ dès que $0 < A < 1$ (attention à bien MINORER $1 - x^n$...).

Exercice 146 – (« principe des zéros isolés ») Raisonnons par l'absurde et supposons que k_0 est le plus petit indice tel que $a_{k_0} \neq 0$. On a alors (majorer le module de la somme dont on a extrait le premier terme...) $f(z) = a_{k_0} z^{k_0} + o(|z|^{k_0})$. Considérons alors $f(z_n)$...

Exercice 147 – Avec $\dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{th}(t) \leqslant 1$ pour t assez grand on traite le début ($R = 1$, et il y a divergence en 1) et pour aller plus loin, on peut noter que $0 \leqslant 1 - a_n \leqslant \mathrm{e}^{-2n}$ donc $a_n(-1)^n = \dfrac{(-1)^n}{n} + o(1/n^2)$.

Chapitre 7

Intégration



7.1 Rappels de cours

- Formule de Taylor avec reste intégral. [PREUVE]
- Intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$ et en 0^+. [PREUVE]
- Comment montrer qu'une fonction est intégrable ? Et d'intégrale convergente ?
- Théorème de convergence dominée.
- Intégrale de la somme d'une série de fonctions.
- Régularité des intégrales à paramètres (continuité, classe $\mathcal{C}^1$).
- Savoir montrer que Γ est $\mathcal{C}^0$... et même un peu plus sur $]0,+\infty[$. Attention : il faut d'une part localiser sur $[A,B] \subset]0,+\infty[$ et d'autre part faire attention à distinguer $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ au moment de la domination.

7.2 Posés en 2024

Exercice 148 – *Mines PC 2024 [5/10]*

Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin}t}dt$ quand x tend vers 0.

Exercice 149 – *Mines PSI 2024 [4/10]*

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor \mathrm{e}^{-x} dx$.

Exercice 150 – *Mines PSI 2024 [7/10]*

1. Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx$ converge.

2. Calculer explicitement I en admettant que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 151 – *Mines PSI 2024 [3/10]*

Soient $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\, dx$ et $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \geqslant 1$.

2. Montrer que I est bien définie.

3. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 152 – *Mines PSI 2024 [7/10]*

Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer de plus que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2. Étudier la convexité de Γ et celle de $\ln \circ \Gamma$.

3. Pour tout $x > 0$, établir : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^n t^{x-1}(1 - t/n)^n\, dt = \Gamma(x)$.

4. Exprimer $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}(1 - t/n)^n\, dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1 - u)^n\, du$.

5. Montrer que la suite de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ converge simplement vers Γ.

Exercice 153 – *Mines PSI 2024 [4/10]*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Soit $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 154 – *Mines PSI 2024 [4/10]*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, R[$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2} = x \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{xt - 1}\, dt$.

3. Que se passe-t-il pour $x = 1$?

Exercice 155 – *Centrale PSI 2024 [3/10]*

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \frac{z^n}{n^2}$.
2. Établir que, pour $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_{1-x}^{1} \frac{\ln(t)}{t-1} dt$.
3. Que se passe t-il en $x = 1$?

Exercice 156 – *Centrale PSI 2024 [7/10]*

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \mathrm{e}^{-xt} dt$.

1. Montrer que f a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^+$ et qu'elle y est continue.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Trouver les limites de f et f' en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. En déduire $f(x)$.
5. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ et en déduire sa valeur.

Exercice 157 – *Mines PSI 2024 [5/10]*

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 158 – *IMT PSI 2024 [6/10]*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}. Donner la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Trouver des réels a, b et c tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 159 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right)$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

1. Citer le théorème de convergence dominée.
2. Justifier la définition de I_n.
3. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

7.3 Posés en colle

Exercice 160 – *Colles 2023-2024 [4/10]*

1. Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}} dx$.
2. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)} dx$.

Exercice 161 – *Colles 2023-2024 [7/10]*

1. Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 162 – *Colles 2023-2024 [2/10]*
Calculer
$$\int_{3/2}^{5/2} \sqrt{-3+4x-x^2}\, dx.$$

Exercice 163 – *Colles 2023/2024 [6/10]*
Donner la limite de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)-1} dt$ quand x tend vers 0^+.

7.4 Récolte 999

Exercice 164 – *CCP 2018 [5/10]*
Soient a, b tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\mathrm{e}^{it}}{1+\cos^2 t} dt$.

Exercice 165 – *CCP 2018 [5/10]*
On définit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

1. Justifier que I et J sont définis, puis que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

Exercice 166 – *IMT 2018 [5/10]*
On s'intéresse à $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{2-\sin^2 u}$.
3. Calculer I en utilisant le changement de variable $u = \mathrm{Arctan}(t)$.

Exercice 167 – *CCP 2018 [4/10]*
On définit, pour $n > 0$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Montrer rapidement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
2. Prouver l'existence de I_n.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 168 – *TPE 2018 [6/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixt}-1}{t} \mathrm{e}^{-t} dt$.

1. Montrer que I est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Exprimer $I'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. En déduire une expression simple de $I(x)$.

Indication : on pourra établir l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{iu}-1\right| \leqslant |u|$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 169 – *IMT 2017 [3/10]*

On définit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh(x)} dx$.

1. Montrer que I est définie.
2. En utilisant le développement en séries entières de $\dfrac{1}{1-u}$, montrer :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

3. Calculer I (on donne : $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 170 – *Centrale 2017 [7/10]*

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et z tel que $|z| < R$, on définit $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$, déterminer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ki\theta} d\theta$.
2. Pour $r \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|S_n(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}.$$

3. Montrer que $\sum |a_n|^2$ est convergente, et calculer sa somme.

7.5 Mais aussi

Exercice 171 – *Mines 2016 [2/10]*

Déterminer selon $p \in \mathbb{R}$ l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^p(x)}{\cos^p(x)+\sin^p(x)} dx$.

Exercice 172 – *Mines 2016 [6/10]*

1. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$ où x est un réel. Trouver l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa dérivabilité et déterminer une expression simple de f.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Existence éventuelle et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln(t)} dt$.

Exercice 173 – *TPE 2016 [4/10]*

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

Exercice 174 – *CCP 2016 [3/10]*

Existence et valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(x) + x^n \mathrm{e}^{-x}} dx$.

Exercice 175 – *IMT 2017 [4/10]*

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Donner une équation différentielle vérifier par f, puis en déduire la valeur de f.

   On donne : $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 176 – *Mines 2017 [3/10]*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$. On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-itx} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists C_n \in \mathbb{R};\ \forall x > 0, \qquad |F(x)| \leqslant \frac{C_n}{x^n}.$$

Exercice 177 – *Centrale 2017 [8/10]*

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer : $I_n \sim n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$.

Exercice 178 – *CCP 2018 [1/10]*

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dt}{\ln(\ln t)}$.

Exercice 179 – *CCP 2018 [6/10]*

1. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^\alpha dt$ soit définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Parmi les valeurs précédentes, déterminer celles pour lesquelles $\sum I_n(\alpha)$ est convergente, puis calculer la somme de cette série.

Exercice 180 – *CCP 2018 [3/10]*

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1} dt$.
2. Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 181 – *Centrale 2018 [3/10]*

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{t}{n}}{t^n + t^2 + 1} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \sin \frac{t}{n}}{t^n + t^2 + 1} dt.$$

Déterminer les limites des suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 182 – *Mines 2018 [5/10]*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que le prolongement continu de f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas $\mathbb{R}^+$.

Exercice 183 – *Mines 2018 [8/10]*

Étudier en fonction de $\alpha > 0$ l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right) dt.$

Exercice 184 – *Mines 2018 [8/10]*

On pose, pour $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx.$

7.6 Indications

Exercice 148 – À défaut d'intégrer l'équivalent (tentant), on peut affiner : $\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin}t} = \cdots = \dfrac{1}{t} + O(1)$ puis intégrer (quand on intègre quelque chose de borné entre x^2 et x^3 on obtient un $O(x^2)$).

Exercice 149 – On intègre entre 0 et n, on casse la somme en deux, on décale... finalement on trouve $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\cdot$ (Validé par Mistral)

Exercice 150 – Pour la convergence comme pour la calcul je m'intéresserais bien à l'intégrale sur $[0, n^2]$ qui nous ramène à $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{2p+1}{p(p+1)^2}$ puis finalement (d'après Mistral) $\dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

Exercice 151 – $t = x^n$ sur $[0, X]$, puis convergence dominée sur $f_n : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-1/n}} \mathbf{1}_{[1,X^n]}$ (domination par $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$).

Exercice 152 – Tout cela est très proche du cours. Cauchy-Schwarz pour la convexité de $\ln \circ \Gamma$. Convergence dominée. Intégration par parties.

Exercice 153 – On prolonge bien sûr en posant $g(0) = f'(0)$. Ensuite, les théorèmes de régularité s'appliquent bien une fois qu'on a noté que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (il est essentiel de ne pas singulariser 0). Les dominations de toutes les dérivées selon x se font sur $[-A, A]$.

Exercice 154 – La suite $\left(\dfrac{r^n}{n^2}\right)$ est-elle bornée ? $\dfrac{1}{1-xt} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (xt)^n$ pour $t \in]0,1[$ et $x \in [0,1[$... et même pour $x = 1$. Convergence normale ou convergence de $\displaystyle\sum \int_{]0,1[} |f_n|$. Attention, en 1 il n'y a plus convergence normale mais le deuxième théorème s'applique : les deux objets convergent et sont égaux.

Exercice 155 – Ressemble au précédent, non ?

Exercice 156 – Pour la limite de f en $+\infty$: $g(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec la domination par $\dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$ (pour $x \geqslant 1$). Même chose pour f'. Pour primitiver $\ln(1+x^2)$, intégration par parties (finir avec un argument de limite). Encore une intégration par parties (sur $[\varepsilon, X]$) pour prouver que $I = f(0) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 157 – IPP pour trouver $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ (le terme tout intégré étant contrôlé par quelque chose de négligeable devant... $f(x)$!)

Exercice 158 – Convergence dominée (par 1), intégration par parties pour trouver $I_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1)I_n$. Puisque cette quantité converge vers 0, on en déduit : $(n+1)I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puis $I_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}\cdot$
On veut ensuite améliorer le DL $I_n = 0 + \frac{1}{n} + o(1/n)$, donc on revient à l'origine de cet équivalent, qui était : $(n+1)I_n = 1 - 2I_{n+1}$: on écrit donc $I_n = \frac{1}{n+1} - 2\frac{I_{n+1}}{n+1}\cdot$
Le premier terme vaut $\frac{1}{n}\frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{n}(1 - 1/n + o(1/n)) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(1/n^2)$ et le second est équivalent à $-\frac{2}{n^2}$ donc égal à $-\frac{2}{n^2} + o(1/n^2)$, et finalement : $I_n = 0 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o(1/n^2)$.

Exercice 159 – Convergence simple vers et dominée par $x \in]0,1] \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\cdot$ Ensuite, on développe en série entière et on déclenche un théorème de sommation terme à terme.

Exercice 160 – Il me semble que $\varphi(2+u) \sim K/\sqrt{u}$, et IPP pour la deuxième qui doit ramener à l'intégrale de quelque chose en $1/x^{3/2}$.

Exercice 161 – Pour la première intégrale, $x = 1/t$ montre que les intégrales sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ sont opposées. Pour la deuxième, IPP pour $f(x) = O(1/x^2)$ en $+\infty$, et $1/t + O(1)$ intégré sur $]x,1]$ pour obtenir $f(x) \sim -\ln(x)$ en 0^+

Exercice 162 – $-3 + 4x - x^2 = -\big((x-2)^2 - 1\big) = 1 - (x-2)^2$, donc je poserais bien $x = 2 + \sin(t)$...

Exercice 163 – J'écrirais bien $\frac{t}{\operatorname{ch}(t) - 1} = \frac{2}{t} + \varphi(t)$ avec φ bornée au voisinage de 0, pour intégrer ensuite et trouver $2\ln(2)$ comme limite.

Exercice 164 – Changement de variable $x = a + b - t$, non ? Distinguer ensuite partie réelle (nulle par imparité) et partie imaginaire, elle même ramenée à $[0,\pi]$, puis application du lemme et changement de variable $u = \cos t$. On trouvera environ $i\frac{\pi^2}{2}\cdots$

Exercice 165 – Très vieux classique... Changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, puis (dans la somme) encore un changement de variable $x = 2u$... pour trouver finalement $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 166 – On aura évidemment fait le changement de variable $x = \sin u$, et finalement : $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Exercice 167 – Pour la première inégalité : étude de fonction sur $\mathbb{R}^+$ (sans les valeurs absolues) ou inégalité des accroissements finis. On a ensuite directement par convergence dominée : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis après multiplication par n, le TCD nous donnera : $I_n \sim \frac{\pi}{2n}\cdot$

Exercice 168 – On pourra établir l'inégalité suggérée via un développement en série entière (puis inégalité triangulaire) ou bien via l'inégalité des accroissements finis. Ensuite, $\left|e^{ixt} - 1\right| \leqslant |xt|$ permet de dominer pour $x \in [-X, X]$. Une fine maîtrise des complexes (et de leurs inverses...) me permet de trouver : $I(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{2} + i\operatorname{Arctan} x$.

Exercice 169 – Cas d'école d'interversion. Je trouve $\frac{\pi^2}{4}\cdot$ Wolfram-Alpha aussi, ce qui est bon signe.

Exercice 170 – $|Z|^2 = Z\overline{Z}$, puis double somme ! Pour terminer, un petit coup de convergence dominée ?

Exercice 171 – La fonction en jeu est continue sur $[0,\pi/2]$ (lorsque $p \geqslant 0$) ou continue sur $]0,\pi/2[$ mais prolongeable en une fonction continue sur $[0,\pi/2]$ (pour $p < 0$). Le changement de variable $y = \pi/2 - x$ nous dit alors que $I + I$ est assez simple à calculer.

Exercice 172 – À x fixé, L'application $g_x : t \mapsto \dfrac{t^x - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$, et $g_x(1-u) \sim x$ quand u tend vers 0, donc g_x est prolongeable par continuité en 1. En 0 c'est plus délicat puisque $g_x(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ si $x \geqslant 0$, mais $g_x(t) \sim \dfrac{1}{t^x \ln t}$ si $x < 0$, donc l'intégrale est convergente si et seulement si $-x < 1$: $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$. En travaillant sur $[a, +\infty[$ avec $-1 < a$ on arrive facilement à dominer ce qu'il faut pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et finalement : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ puis (valeur en 0) $f(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 173 – Classique... Moralement ça doit ressembler à $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \ln 3$. Pour préciser cela, il s'agit de majorer $|\cos t - 1|$. On peut par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis qui nous donne $|t|$ comme majorant. Il reste à écrire $\cos t = 1 + (\cos t - 1)$, diviser par t, intégrer entre x et $3x$, et majorer la valeur absolue de la deuxième intégrale par l'intégrale d'une valeur absolue...

Exercice 174 – Convergence dominée sans problème, puis changement de variable $u = \mathrm{e}^x$. On trouve finalement comme limite : $2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}) - \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 175 – Sans problème, $f'(x) = \dfrac{x}{2} f(x)$ après intégration par parties.

Exercice 176 – Pour appliquer les théorèmes de régularité des intégrales à paramètres, il suffit que f soit continue (par morceaux) ; le caractère $\mathcal{C}^\infty$ est inutile. Des intégrations par parties feront ensuite le job (mais là évidemment, on a besoin de f de classe $\mathcal{C}^\infty$!).

Exercice 177 – Théorème fondamental de l'analyse ; $t = xu$ (pour $x \neq 0$)... et la relation s'étend à $x = 0$. On peut ré-appliquer le résultat à g... qui vérifie bien ce qu'il faut !

Exercice 178 – $\ln(\mathrm{e}+u) = \ln(\mathrm{e}(1+u/\mathrm{e})) = 1 + \dfrac{u}{\mathrm{e}} + o(u)$ puis $\dfrac{1}{\ln(\ln(\mathrm{e}+u))} \sim \dfrac{\mathrm{e}}{u} \cdots$

Exercice 179 – Une interversion (formelle, non justifiée) donne une somme égale à $\dfrac{1}{\alpha}$ pour $\alpha > 0$. Pour formaliser, notons que si $\alpha \leqslant 0$ alors $(1-t)^\alpha \geqslant 1$ donc $I_n(\alpha) \geqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Pour $\alpha > 0$, il n'est pas si évident de majorer $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\, dt$. On peut alors passer par les sommes partielles, et il s'agit alors de montrer : $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{\alpha-1} dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence dominée doit faire l'affaire.

Exercice 180 – Interversion ; $u = pt$...

Exercice 181 – Théorème de convergence dominée (j'utilise $|\sin u| \leqslant u$ et je prends $n \geqslant 3$ pour la deuxième) pour trouver respectivement $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\ln 2}{2}\cdot$

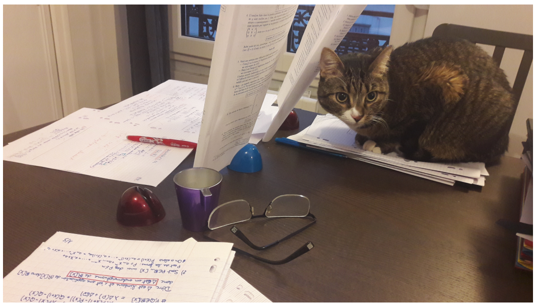
Exercice 182 – Au voisinage de 0 : $|f(x)| \leqslant \dfrac{x - x^2}{-\ln x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Au voisinage de 1, on peut écrire $f(1+u) = \displaystyle\int_u^{2u+u^2} \frac{dv}{\ln(1+v)} dv$ or $\dfrac{1}{\ln(1+v)} = \dfrac{1}{v} + O(1)$ donc $f(1+u) = \ln 2 + o(1)$. Ensuite, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 1 et $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 183 – En $+\infty$, $f(t) = \exp\left(\dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1 \sim \dfrac{\sin^2 t}{t^\alpha}$, qui est intégrable si et seulement si $\alpha > 1$ (un sens évident ; pour l'autre, supposer $\alpha \leqslant 1$ et par exemple minorer les intégrales sur des intervalles de la forme $[k\pi, (k+1)\pi]$ ou encore faire une intégration par parties dans $\displaystyle\int_1^T \frac{\sin^2 t}{t}$ en dérivant $\dfrac{1}{t}$ après linéarisation de $\sin^2 t$...). En 0, discuter selon la position de α par rapport à 2.

Exercice 184 – Une fois établie (par exemple après intégration par parties) la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, on prouve sans mal que f est définie et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et même $\mathbb{R}^+$. Il s'agit alors d'estimer f au voisinage de $+\infty$, ce qu'on peut typiquement faire avec deux intégrations par parties, qui donnent : $f(x) = \dfrac{\cos x}{x} + O(1/x^2)$.

Chapitre 8

Espaces euclidiens



8.1 Rappels de cours

Directement du cours :
- Cauchy-Schwarz. [PREUVE]
- Projections et symétries orthogonales.
- Distance à un sous-espace. [PREUVE]
- Définition des endomorphismes orthogonaux. [DÉFINITION]
- Matrices et endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3.
- Endomorphismes symétriques (autoadjoints). [DÉFINITION]
- Théorème spectral, versions géométrique et matricielle.

Proche du cours :
- $u \in \mathcal{S}(E)$ a toutes ses valeurs propres positives si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$.
- Encadrement, pour u autoadjoint, de $\langle u(x)|x\rangle$ à l'aide des valeurs propres de u. [PREUVE]
- Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ (hors programme, mais...).
- Unicité si on impose $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, mais il faut géométriser (plus difficile... mais/et/donc payant !).

8.2 Posés en 2024

Exercice 185 – *CCINP PSI 2024 [4/10]*
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et a un vecteur unitaire de E. On définit :

$$\varphi : (x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y\rangle + k\,\langle x, a\rangle\,\langle y, a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 186 – *Centrale PSI 2024 [6/10]*
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T.
2. Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ stable par $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 187 – *Centrale PSI 2024 [5/10]*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Soient $f_1, \dots, f_n \in E$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$.

1. Montrer que les $a_{i,j}$ sont bien définis.
2. Montrer que A est symétrique et que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^\mathrm{T} A Y$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Exercice 188 – *Centrale PSI 2024 [6/10]*
Soit E un espace euclidien.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal. Montrer que p est autoadjoint et 1-lipschitzien.
2. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.
3. Montrer que χ_{p+q} est scindé sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les racines de χ_{p+q} appartiennent à $[0, 2]$.

Exercice 189 – *Centrale PSI 2024 [8/10]*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $a_{i,j} > 0$ pour tous i, j. Est-ce que les valeurs propres de A sont toutes positives ?
2. On note $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les valeurs propres de A.
   Montrer que $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant} a_{i,i} a_{j,j} - a_{i,j}^2$.
3. On suppose $\alpha_i \geqslant 0$ pour tout i. Redémontrer que $X^\mathrm{T} A X \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. En déduire que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} a_{j,j} \geqslant a_{i,j}^2$.

Exercice 190 – *Centrale PSI 2024 [8/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on pose $q(X) = \dfrac{X^\mathrm{T} A\, X}{X^\mathrm{T} X}$.

1. Énoncer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.
2. Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A, distinctes ou non.
   Montrer que $\lambda_3 = \mathrm{Max}\,\{q(X),\ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$. Énoncer une propriété similaire pour λ_1.
3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour $P \in \mathcal{P}$, justifier l'existence de
   $$\mathrm{Max}\left\{X^\mathrm{T} A X \ ;\ X \in P,\ \|X\| = 1\right\}$$
   puis montrer que :
   $$\lambda_2 = \underset{P \in \mathcal{P}}{\mathrm{Min}} \left(\mathrm{Max}\left\{X^\mathrm{T} A\, X \ ;\ X \in P,\ \|X\| = 1\right\}\right)$$

Exercice 191 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*
Soient E en espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2$.
2. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 192 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, $\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leqslant r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2$.
3. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{tr}(B))^2 \leqslant \mathrm{rg}(B)\,\mathrm{tr}(B^2)$.
4. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $b_{i,i} = 1$ pour tout i et $|b_{i,j}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.
   Montrer que $\mathrm{rg}(B) \geqslant n/2$.

Exercice 193 – *Mines PSI 2024 [8/10]*
Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère une isométrie indirecte f.

1. Montrer que f se décompose en une rotation d'axe Δ et une réflexion de plan $\Delta^{\perp}$.
2. Cette décomposition est-elle unique ?
3. La rotation et la réflexion commutent-t-elles ?

Exercice 194 – *Mines PSI 2024 [5/10]*
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel et donner sa dimension.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner $d(A, F)$ en fonction notamment de $\mathrm{tr}(A)$.

8.3 Posés en colle

Exercice 195 – *Colles 2023/2024 [7/10]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \|M - (aI_n + bJ)\|_2$$

où J est la matrice avec que des 1.

Exercice 196 – *Colles 2023/2024 [5/10]*
Montrer qu'une matrice réelle A est antisymétrique si et seulement si pour toute matrice orthogonale P, on a $P^{-1}AP$ de diagonale nulle.

Exercice 197 – *Colles 2023/2024 [8/10]*
On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Soit $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$, puis $P \in K \setminus \{0\}$. Quel est le degré de P ?
3. Montrer que $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)t^x dt$ est une application rationnelle.
4. Déterminer ϕ à une constante multiplicative près.
5. En déduire les coefficients de P.

8.4 Récolte 999

Exercice 198 – *Mines 2021 [4/10] - Thibaud C.*
Caractériser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 199 – *IMT 2017 [5/10]*
Calculer le minimum, pour $a, b \in \mathbb{R}$, de

$$\int_0^1 (t - (a\cos t + b\sin t))^2\, dt.$$

Exercice 200 – *Polynômes de Legendre ; Mines 2016 [8/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour :

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

2. Montrer que les polynômes de Legendre ($P_n = \dfrac{1}{n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. En dehors de toutes considérations d'orthogonalité, montrer que P_n possède n racines simples dans $]-1, 1[$.
4. Déterminer $\|P_n\|^2$.

Exercice 201 – *CCP 2016 (deux fois) [4/10]*
Caractériser complètement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (euclidien) canoniquement associé à :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

8.5 Mais aussi

Exercice 202 – *Mines 2016 [5/10]*
Soient E un espace euclidien et s un endomorphisme symétrique de E. Montrer que s est k-lipschitzien si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(s), \qquad |\lambda| \leqslant k.$$

Exercice 203 – *Centrale 2016 [6/10]*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit :

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P|Q\rangle = \int_0^1 t^2 P(t)Q(t)\, dt, \quad \text{et} \quad \forall P \in E,\ u(P) = X(1-X)P'' + (3-4X)P'.$$

1. Montrer que $\langle\,|\,\rangle$ définit un produit scalaire sur E et que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
3. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 204 – *CCP 2016 [4/10]*
Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)e^{-t}dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}dt$.

Exercice 205 – *ENSAM 2018 [4/10]*
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y + a + t = x - y + z - t = 0\}$

1. Donner une base orthonormée de F et de $F^\perp$.
2. Écrire la matrice du projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

Exercice 206 – *IMT 2018 [3/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle. On pose $B = AA^{\mathrm{T}}$.

1. Justifier que B est diagonalisable.
2. Préciser le rang de B.
3. Donner les éléments propres de B.

Exercice 207 – *TPE 2018 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres (avec répétition) $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Montrer : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2$.

Exercice 208 – *Centrale 2018 [8/10]*
Soit $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n possède exactement n racines réelles distinctes.

Exercice 209 – *Mines 2018 [2/10]*
Soit $f : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 \mathrm{e}^{-t} dt$.
Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 210 – *Mines 2018 [6/10]*
Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{tr}(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle u(e_i)|e_i\rangle$
2. Soit u un endomorphisme symétrique de E à valeurs propres positives. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$.
3. Soient u et v deux endomorphismes symétriques à valeurs propres positives. Montrer : $\mathrm{tr}(u\circ v) \geqslant 0$.

Exercice 211 – *Mines 2016, 2017, 2018... [7/10]*
Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E, et $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives ($\geqslant 0$).

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{S}(E)$, $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.
3. Soient $u, v \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u+v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$.

8.6 Indications

Exercice 185 – Les caractères bilinéaire et symétrique ne posent pas de problème. Pour que ϕ soit positive il est déjà nécessaire que $\varphi(a, a) > 0$, c'est-à-dire : $k > -1$. Réciproquement si cette condition est vérifiée, on estime $\varphi(x, x)$ en décomposant $x = \lambda a + y$ où $y \perp a$, de sorte que :

$$\varphi(x, x) = \lambda^2(1 + k) + \|y\|^2$$

Cette quantité est positive, est ne peut être nulle que si $\lambda = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

Exercice 186 – Puisque $(F^\perp)^\perp = F$, les deux implications sont symétriques. Pour la directe, sous l'hypothèse de stabilité de F et en prenant $X \in F^\perp$, on montre que $M^{\mathrm{T}} X \in F^\perp$ en le tapant contre un élément quelconque de F... Les plans de $\mathbb{R}^3$ sont des orthogonaux de vecteurs (dirigeant leur orthogonal, qui est une droite !). Il s'agit donc de déterminer les vecteurs propres de A^{T}. On a $\chi_{A^{\mathrm{T}}} = (X-1)^3$, et le sous-espace propre de l'unique valeur propre 1 est de dimension $3 - \mathrm{rg}(A^{\mathrm{T}} - I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 2$. On trouve facilement que ce noyau est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ On en déduit les plans stables. Il y aura par exemple ceux d'équation $y = 0$ ou $x - z = 0$. Mais aussi $42x + 1515y - 42z = 0$

Exercice 187 – Cauchy-Schwarz (en intégration) n'est pas qu'une formule... et on traite les questions suivantes en notant : $\varphi(X,Y) = \displaystyle\int_I (x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)^2$

Exercice 188 – Le début est du cours. Ensuite, $p+q$ est symétrique/auto-adjoint donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et enfin on se souvient/établit que les valeurs propres maximales/minimales encadrent les $\langle (p+q)(x) | x\rangle$ pour $\|x\| = 1$.

Exercice 189 – On peut ramer jusqu'au moment où on se dit : « mais dans quelle circonstance peut-on rencontrer une somme de la forme de celle du membre de gauche (bref : les termes croisés) ?». Ceci nous guide naturellement (via le théorème spectral) vers $\mathrm{tr}(A^2)$. Le membre de gauche vaut en fait $\dfrac{1}{2}\left((\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right)$. La dernière question est assez fine. On peut montrer que $B = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j}\end{pmatrix}$ est positive (via $X^{\mathrm{T}} B X = Y^{\mathrm{T}} A Y$) donc ses (deux) valeurs propres sont positives.

Exercice 190 – La deuxième question est un exercice fait plusieurs fois en cours/TD (avec un minimum pour λ_1). Pour la troisième, il existe un plan ($\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, où (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée de diagonalisation) pour lequel la maximum vaut λ_2. Il reste à montrer que pour tous les autres plans, le maximum vaut au moins λ_2. Or tout plan rencontre $\mathrm{Vect}(f_2, f_3)$ de façon non triviale (la dimension vaut 2 ou 3 par Grassmann)... et pour tout $X \neq 0$ appartenant à ce plan, $q(X)$ est minoré par λ_2

Exercice 191 – Un dessin exhibant une décomposition de x règle la première question. Trois points de vue très proches pour la seconde. Le bon est celui qui vous semble le plus naturel, mais regardez et comprenez les autres.

— On peut noter que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}} A)$ (avec A la matrice de p dans la base $\mathcal{E}$), puis orthodiagonaliser A.

— En notant $\mathcal{F}$ une base orthonormée de diagonalisation de p on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle p(e_i) | f_j\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i | p(f_j)\rangle^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle e_i | p(f_j)\rangle^2 = \sum_{j=1}^{n} \|p(f_j)\|^2$$

— D'après la première question,

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle p(e_i) | e_i\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}(p, \mathcal{E})\right) = \mathrm{tr}(p)$$

Exercice 192 – Orthodiagonaliser B et utiliser la deuxième question pour traiter la troisième. Il me semble ensuite que $\mathrm{tr}(B^2) = 2n - 1$ donc d'après l'inégalité précédente, $\mathrm{rg}(B) \geqslant \dfrac{n}{2n-1} \geqslant \dfrac{n}{2}$.

Exercice 193 – Pas trop dans l'esprit PSI... Bon, f possède forcément une valeur propre réelle (son polynôme caractéristique est de degré 3), forcément de valeur absolue égale à 1 (norme préservée). Ensuite, dès que $f(x) = \pm x$ (avec $x \neq 0$) on a $x^\perp$ stable par f, et la restriction de f à ce plan est une isométrie. Il reste à discuter sur la valeur propre initiale, qui nous dira si la restriction au plan est de déterminant 1 (c'est alors une rotation) ou -1 (c'est alors une symétrie orthogonale). Finalement on trouve une base orthonormée dans laquelle la matrice de f vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas il s'agit bien d'une composée commutative (calcul par bloc) comme dans l'énoncé, avec les deux cas particuliers où $\theta = 0$ (réflexion comme dans la première configuration) où $\theta = \pi$ (on trouve $-\mathrm{Id}$). Dans les deux premiers cas l'axe est unique (c'est le noyau de $f + \mathrm{Id}$) donc la décomposition aussi. Dans le dernier cas ($-\mathrm{Id}$) on peut prendre n'importe quel axe.

Exercice 194 – $F = I_n^\perp$, et après un dessin :

$$d(A,F)^2 = \left\|A - p_F^\perp(A)\right\|^2 = \left\|p_{\mathrm{Vect}(I_n)}^\perp(A)\right\|^2 = \left\|\frac{\langle A|I_n\rangle}{\|I_n\|^2} I_n\right\|^2 = \frac{\langle A|I_n\rangle^2}{\|I_n\|^2}$$

soit finalement $d(A,F) = \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{\sqrt{n}}\cdot$

Exercice 195 – Après avoir résolu le système de deux équations d'orthogonalité je trouve le projeté orthogonal, puis une formule cohérente avec le cas où $M \in \mathrm{Vect}(I,J)$:

$$d^2 = \sum m_{i,j}^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i\neq j} m_{i,j}\right)^2 - \frac{(\mathrm{tr}M)^2}{n}\cdot$$

Exercice 196 – Le sens direct est évident : $P^{-1}AP$ est elle-même antisymétrique donc de diagonale nulle. Pour la réciproque, j'invite à travailler en dimension 2 et faire un petit calcul avec des matrices orthogonales simples (genre de rotation d'angle $\pi/2$... puis $\pi/4$, pourquoi pas ?)

Exercice 197 – Déjà, K est une droite ($(n+1) - n = 1$) et l'intersection de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec son orthogonal est réduit à 0 donc P est de degré n. Si on l'écrit $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $\phi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{x+k+1}$, et comme ϕ est de degré négatif (elle tend vers 0 en $+\infty$) avec n racines connues $(0, 1, ..., n-1)$ ainsi que $n+1$ pôles, on est ramené, à un coefficient multiplicatif près, à calculer la décomposition en éléments simples :

$$\frac{X(X-1)...(X-(n-1))}{(X+1)(X+2)...(X+n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k+1},$$

ce qui sauf erreur de ma part, avec $((X+k+1)F)(-k-1)$, fournit $a_k = (-1)^{n-k}\dfrac{(n+k)!}{k!^2(n-k)!}\cdot$

Exercice 198 – Cette matrice est dans $O_3(\mathbb{R})$ et même (produit vectoriel des deux premières colonnes) dans $SO_3(\mathbb{R})$; on parle donc d'une rotation. Son axe est dirigé par tout vecteur dirigeant $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$; par exemple $d = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; son angle θ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = 2$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et en prenant $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \perp d$ on a $\sin\theta$ du signe de $\langle d \wedge e_3 | u(e_3)\rangle$ (en orientant l'axe par d)...

Exercice 199 – Je serais tenté de dessiner le plan $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire auquel on pense (à ce sujet : le candidat a été cuisiné sur l'espace de travail). Ensuite, une flèche qui dépasse de ce plan, un projeté orthogonal. Enfin je marmonnerais Pythagore, et me préparerais à quelques intégrations par parties pour les calculs (que l'examinateur m'épargnerait probablement s'il voyait que je ne fais pas de refus d'obstacle).

Exercice 200 – Pour l'orthogonalité, intégrer n fois par parties dans $\langle X^k|P_n\rangle$, avec $k < n$. Ensuite, rolliser pour obtenir de plus en plus de racines pour $((X-1)^n(X+1)^n)^{(k)}$ en n'oubliant pas la caractérisation de l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme. Pour la norme, réfléchir à la valeur de $\langle P_n|X^n\rangle$ (d'une part, d'autre part...).

Exercice 201 – C'est un endomorphisme orthogonal (trois produits scalaires, trois normes), de déterminant 1 ($u(e_1) \wedge u(e_2) = +u(e_3)$) donc une rotation d'axe $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$. En regardant la trace on obtient le cosinus de l'angle. En orientant l'axe par exemple par n dirigeant $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et en fixant $x \perp n$, le signe du sinus sera celui de $\langle u(x)|n \wedge x\rangle$.

Exercice 202 – Le sens direct est clair. Pour la réciproque, on diagonalise comme toujours en base orthonormée, et on pythagorise.

Exercice 203 – Pour le caractère « endo », on peut regarder $u(X^k)$, qui est bien de degré $\leqslant k$. Ensuite, on montre de façon classique le caractère symétrique de l'endomorphisme par une intégration par parties, en notant que :

$$t^2t(1-t)P''(t)+(3-4t)t^2P'=\left(t^3(1-t)P'\right)',$$

ce qui permet d'établir $\langle u(P)|Q\rangle = -\displaystyle\int_0^1 t^3(1-t)P'(t)Q't)dt$, expression symétrique en P et Q. Les valeurs propres pourront se lire sur la diagonale de la matrice représentant u dans la base canonique de E.

Exercice 204 – Un dessin sera apprécié. Il s'agit bien sûr de calculer la distance d'un vecteur à un plan. Pour calculer le projeté orthogonal $p(X^2)$, j'écris deux conditions d'orthogonalité :

$$\langle X^2-(aX+b)|1\rangle = \langle X^2-(aX+b)|X\rangle = 0,$$

ce qui me donne le projeté $4X-2$ (on se rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}dt = n!$) puis :

$$\left\|X^2-p(X)\right\|^2 = \langle X^2-p(X)|X^2-p(X)\rangle = \langle X^2-p(X)|X^2\rangle = 4$$

(on a utilisé le fait que $X^2-p(X)\perp \mathbb{R}_1[X]\ni p(X)$).

Exercice 205 – On aura évidemment avantage à voir F comme l'orthogonal d'un plan dont on dispose d'une base orthogonale... On vérifiera à la fin que la matrice calculée est symétrique (pourquoi ?) et de bonne trace (à savoir ?).

Exercice 206 – B est symétrique réelle donc diagonalisable. Par ailleurs l'image de B est la droite engendrée par A, ce qui donne un noyau de dimension $n-1$, et A constitue un vecteur propre pour la valeur propre $A^{\mathrm{T}}A=\sum a_i^2\neq 0$.

Exercice 207 – Je ferais bien intervenir la norme usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'orthodiagonalisation $A = PDP^{-1}$ avec $P\in O_n(\mathbb{R})$, de sorte que

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{tr}(PD^2P^{-1}) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_i \lambda_i^2$$

Exercice 208 – Intégrer par parties pour le caractère orthogonal. Plus précisément, on montre que P_n (qui est de degré n) est orthogonal à X^i pour tout $i<n$; et pour cela on écrit :

$$\langle P_n|X^i\rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi^{(n)}(t)}_{=\left(\varphi^{(n-1)}\right)'(t)} t^i dt = i\int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n-1)}(t)t^{i-1}dt = \cdots = i!\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(n-i)}(t)dt = \left[\varphi^{(n-i-1)}(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Se rappeler de Rolle (et sa version généralisée, borderline...) pour les racines.

Exercice 209 – Bien entendu, $f(x_1,...,x_n)$ est (le carré de) la distance de -1 à un polynôme amené à décrire un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$; Pythagore et/ou le cours font le le reste.
On aura bien entendu soigneusement défini la produit scalaire auquel on pense et expliqué pourquoi c'est effectivement un produit scalaire.

Exercice 210 – Que représentent les colonnes d'une matrice ? Et comment décomposer un vecteur dans une base orthonormée ? Ensuite, je décomposerais bien x dans une base orthonormée de diagonalisation. Enfin, j'enchaînerais bien les deux résultats précédents !

Exercice 211 – Diagonaliser les symétriques en base orthonormée est souvent une bonne idée. Pour le noyau d'une somme de symétriques positifs, je regarderais comme souvent $\langle (u+v)(x)|x\rangle$... puis je prendrais bien l'orthogonal de la relation sur les noyaux pour prouver celle sur les images (dans le premier point, la somme directe est orthogonale).

Chapitre 9

Équations différentielles

9.1 Rappels de cours

— Résolution théorique et pratique des équations scalaires du premier ordre ; savoir *vraiment* pratiquer de la variation de la constante.
— Même chose pour les équations du deuxième ordre (homogène, pour la résolution pratique).
— Nature de $\mathcal{S}_H$ pour le premier ordre vectoriel. Vectorialisation.
— Systèmes différentiels linéaires (c'est essentiellement de la réduction).
— Recherche de solutions développables en série entière (analyse-synthèse).
— Raccordement de solutions, dans le cas non résolu [1].

9.2 Posés en 2024

Exercice 212 – *CCINP PSI 2024 [6/10]*
On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y'' + ty' + y = \frac{1}{t} + t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.
2. On pose $g : x \mapsto f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
4. Reprendre l'exercice avec ce qui était probablement le vrai énoncé, c'est-à-dire en résolvant sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation
$$t^2y'' + ty' - y = \frac{1}{t} + t$$

1. i.e. : « le machin devant y' peut s'annuler ».

Exercice 213 – *IMT PSI 2024 [2/10]*

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y+z \\ y' & = & x \\ z' & = & x+y+z \end{array}\right.$

Exercice 214 – *CCINP PSI 2024 [6/10]*

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et (S) le système différentiel $X' = AX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. Déterminer alors les solutions de (S).
4. Soit (S') le système différentiel $X'' = AX$. Déterminer les solutions réelles de (S').
5. Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de (S'). Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 215 – *Mines PSI 2024 [6/10]*

Soit (E) l'équation différentielle : $x^2y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+.

Exercice 216 – *Mines PSI 2024 [7/10]*

On s'intéresse aux éventuelles solutions $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de l'équation différentielle

$$(E) \ : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

1. Montrer que $a_0 = 1/2$, $a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.
2. En déduire l'unicité de f.
3. Déterminer les a_n, le rayon de convergence de f puis exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 217 – *Mines PSI 2024 [7/10]*

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_{a,b,c} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} be^t + ce^{-t} \\ 2a - be^t \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Soit $F = \left\{ f_{a,b,c},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
2. Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in F$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = Mf(t)$.
3. La matrice M est-elle inversible ?
4. Quelles sont les valeurs propres de M ? Pouvait-on s'y attendre ?

9.3 Mais aussi

Exercice 218 – *Colles 2023/2024 [5/10]*

Soit a un réel strictement positif. Discuter l'existence de solutions bornées pour l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos^3(at)$$

Exercice 219 – *Colles 2023/2024 [5/10]*
Résoudre sur $]-1,+\infty[$:
$$xy' + y = \frac{1}{1+x}\cdot$$
Est-ce qu'il existe une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Exercice 220 – *CCINP 2023 [6/10]*
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. En faisant le moins de calculs possible, montrer que A est semblable à B.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Exercice 221 – *CCP 2016 [4/10]*
Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}$.

Exercice 222 – *IMT 2016 [7/10]*
Résoudre l'équation différentielle :
$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{|x|}.$$

Exercice 223 – *Mines 2018 [8/10]*
On considère (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, où a et b désignent des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer, pour deux solutions f et g de E, la quantité $W = fg' - f'g$.
2. On suppose a impaire et b paire. Montrer que la fonction f solution de (E) avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est paire. Montrer de même que la fonction g solution de (E) avec les conditions initiales $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ est impaire. En déduire qu'il existe une base de l'espace des solutions de (E) constituée d'une fonction paire et d'une impaire.
3. On suppose qu'il existe une base de l'espace des solutions de (E) constituée d'une fonction paire et d'une impaire. Montrer que a est impaire et b est paire.

9.4 Indications

Exercice 212 – L'essentiel est de justifier l'équivalence (gestion de la quantification en x vs t, le « on pose ... » ne signifiant pas grand chose sans précisions). Pour l'équation « avec un plus » je trouve $K_1\cos(\ln t) + K_2\sin(\ln t) + \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2}t$ alors que « avec un moins » j'obtiendrais plutôt $K_1 t + \dfrac{K_2}{t} + \dfrac{1}{2}t\ln t - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln t}{t}\cdot$

Exercice 213 – Le polynôme caractéristique de la matrice qu'on imagine vaut $X(X+1)(X-2)$, donc la diagonalisation devrait bien se passer.

Exercice 214 – Puisque $\chi_A = (X-3)(X+1)(X-2)$, les trois premières questions doivent assez bien se traiter. Pour la suite, il s'agit de résoudre $U'' = DU$, ce qui nous donne sur $\mathbb{R}$ quelque chose comme
$$\begin{pmatrix} K_1\mathrm{e}^{t\sqrt{3}} + K_2\mathrm{e}^{-t\sqrt{3}} \\ K_3\cos(t) + K_4\sin(t) \\ K_5\mathrm{e}^{t\sqrt{2}} + K_6\mathrm{e}^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
Les solutions bornées constituent un espace de dimension 2, et il reste à justifier que U est bornée si et seulement si $X = PU$ l'est.

Exercice 215 – Une éventuelle solution DSE $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ devrait vérifier $a_n = (n-1)!$ pour tout $n \geqslant 1$, mais alors le rayon de convergence serait nul. Il s'agit ensuite de déterminer les K tels que $x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}\left(K + \int_0^x \mathrm{e}^{-1/t} dt\right)$ est bornée. Une condition nécessaire (obtenue en 0^+) est d'avoir $K = 0$. Réciproquement, en prenant K ainsi on majore facilement la (valeur absolue de) cette quantité en x par $|x|$: elle répond au problème.

Exercice 216 – On trouvera comme unique solution DSE l'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} & \text{si} x \neq 0 \end{cases}$

Exercice 217 – Je trouve (avec un peu de bricolage peu glorieux) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique (sans surprise...) $X(X-1)(X+1)$.

Exercice 218 – Les solutions de l'équation homogène sont bornées, et le second membre vaut $\dfrac{1}{4}(\cos(3at) + 3\cos(at))$ donc ça résonne si et seulement si $a \in \{1, 1/3\}$.

Exercice 219 – Le recollage en 0 fournit comme unique solution $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Cette fonction est développable en série entière au voisinage de 0 donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

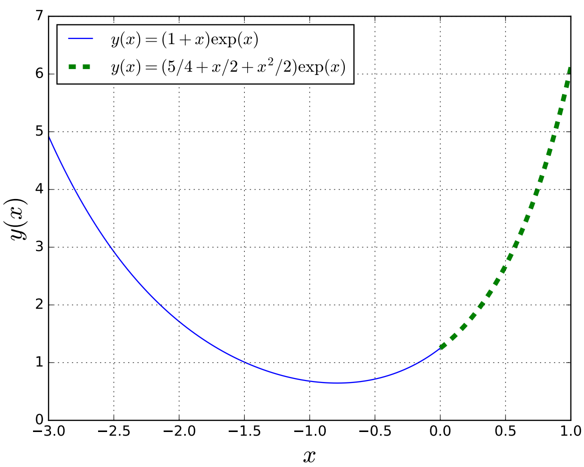
Exercice 220 – Polynôme caractéristique, rang de $A \pm I_4$... et A

Exercice 221 – C'est à la frontière du cours... La structure de $\mathcal{S}_H$ (espace vectoriel de dimension 3) est ce que vous imaginez. Ensuite au delà de la dimension 2, est-ce au programme qu'une base est constituée des $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ avec λ décrivant les racines complexes du polynôme auquel on pense, sous l'hypothèse qu'elles sont distinctes ? À voir. Quoi qu'il en soit ici cela donne des solutions complexes, et on trouve des solutions réelles via leurs parties réelles et imaginaires :

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}\{\mathrm{e}^t, \cos\left(\sqrt{3}t/2\right)\mathrm{e}^{-t/2}, \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)\mathrm{e}^{-t/2}\}$$

Face à un examinateur grognon on peut toujours sortir ces solutions du chapeau, prouver qu'elles constituent une famille libre et conclure par dimension. Si vous ne savez absolument pas d'où vient cette histoire de $\mathrm{e}^{\lambda t}$, il est bien évident que vous vous exposez à quelques ennuis, mais...
Pour une solution particulière, on en cherche une de la forme $K\mathrm{e}^t$ si $p \neq 1$, et $t \mapsto Kt\mathrm{e}^t$ si $p = 1$.

Exercice 222 – Il s'agit de recoller $x \mapsto (\alpha + \beta x + x^2/2)\mathrm{e}^x$ et $x \mapsto (\gamma + \delta x))\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}/4$. Je trouve comme conditions nécessaires et suffisantes de raccordement : $\alpha = \gamma + 1/4$ et $\beta = \delta - 1/2$.



Un raccord... avec $\gamma = \delta = 1$

N.B. : Pour le raccord, on peut élégamment contrer l'analyse-synthèse usuelle grâce à Cauchy-Lipschitz, ici.

Exercice 223 – Comme toujours, $W' = -aW$ puis $W = K\mathrm{e}^{-A}$, où K est une constante et A une primitive de a (on va s'en servir de façon fine à la fin !). Pour la deuxième question, je m'intéresse à $h : x \mapsto f(x) - f(-x)$: elle est solution de (E) avec les conditions initiales $h(0) = h'(0) = 0$... Pour la dernière question, si je note f une solution paire, alors j'obtiens le système

$$\begin{cases} (a(x) + a(-x))\, f'(x) + (b(x) - b(-x))\, f(x) & = & 0 \\ (a(x) + a(-x))\, g'(x) + (b(x) - b(-x))\, g(x) & = & 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système (vu avec les bonnes lunettes) n'est autre que le Wronskien... qui ne s'annule pas (sans quoi il serait toujours nul d'après la première question... et un peu de travail classique mais non instantané : ce n'est pas un résultat de cours !).

Chapitre 10

Fonctions de plusieurs variables, topologie

10.1 Rappels de cours

— Savoir montrer qu'un ensemble est fermé (stable par passage à la limite, ou image réciproque d'un fermé par une application continue).
— Savoir montrer qu'une fonction est continue : décomposer en sommes, produits, composées de fonctions élémentaires ; on termine/commence en général par des applications-coordonnées $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_k$ (qui sont continues car linéaires entre espaces de dimension finie).
— Une fonction continue sur un fermé borné (en dimension finie) et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.
— Condition nécessaire pour qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ possède un extremum local en un point intérieur. [PREUVE ?]
— Condition suffisante pour posséder un extremum local via la hessienne. Il s'agit de bien comprendre les 4 situations en fonction des signes (stricts ou non) des valeurs propres.

10.2 Posés en 2024

Exercice 224 – *Mines PSI 2024 [8/10]*
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

1. Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.
2. Montrer que N_φ et $\| \|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

Exercice 225 – *CCINP PSI 2024 [5/10]*
Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on note $f(x, y) = x^2 y + y \ln^2(y)$.

1. f possède-t-elle des extrema globaux ?
2. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.
3. Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 226 – *Mines PSI 2024 [5/10]*

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$
d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.
2. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

Exercice 227 – *CCINP PSI 2024 [6/10]*
Soient $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - y^2$ et $C = \{(x, y),\ h(x, y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, puis montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de h. La fonction h admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x, y) = 0$ pour tout (x, y) dans C.
   (a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f\left(t^2, t^3\right) = 0$. En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : u \mapsto f(t^2, u)$. Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in \left]-t^3, t^3\right[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$
   (c) Conclure que $(0, 0)$ est un point critique pour f.
   (d) Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C.

Exercice 228 – *Centrale PSI 2024 [5/10]*
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\, dt$

1. Montrer que N_a est une norme sur E.
2. (a) Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.
   (b) Montrer qu'une suite de polynômes (P_n) converge dans (E, N_0) si et seulement si elle converge dans (E, N_1).
3. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$. Montrer que N_a et N_b sont équivalentes.
4. Soit $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ avec $a < b$. Montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
   Indication : considérer $P_n = X^n$.
5. Que dire si $E = \mathbb{R}_n[X]$?

10.3 Mais aussi

Exercice 229 – *Colles 2023/2024 [1/10]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$. Montrer que $p(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 230 – *Colles 2023/2024 [4/10]*
L'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\| \|_\infty$. Montrer que l'ensemble des $f \in E$ à valeurs strictement positives est un ouvert de E.
Quelle est son adhérence ?

Exercice 231 – *Colles 2023/2024 [3/10]*
L'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est muni de $\| \ \|_\infty$ et on note A l'ensemble des $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f \geqslant 1$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.

Exercice 232 – *Colles 2023/2024 [5/10]*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Donner un sens précis à cette limite.
2. Donner un exemple de telle fonction.
3. Montrer qu'une fonction vérifiant cette hypothèse possède forcément un minimum global.

Exercice 233 – *ENSAM 2018 [5/10]*
On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$.

1. Montrer que f admet un point critique, mais que ce n'est pas un extremum.
2. Montrer que f possède sur le disque fermé unité un maximum et un minimum, puis les déterminer.

Exercice 234 – *Centrale 2018 [8/10]*
On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

1. (a) Déterminer les points critiques de f.
   (b) Déterminer les bornes inférieure et supérieure de f sur $\mathbb{R}^2$.
   Dans la suite, on prend E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E, et on définit
   $$\varphi : x \in E \longmapsto \langle u(x)|x\rangle \mathrm{e}^{-\|x\|^2}.$$
2. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de φ sur E.

Exercice 235 – *Navale 2018 [3/10]*
Soient $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Donner l'ensemble des points M de $\mathcal{S}$ tels que le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M soit parallèle à P.

Exercice 236 – *Mines 2018 [6/10]*
Soit E un espace vectoriel normé et A une partie ouverte de E. Montrer que $U = \displaystyle\bigcup_{a\in A} B_f(a,1)$ est un ouvert. *(Il s'agit des boules fermées.)*

Exercice 237 – *Mines 2018 [9/10]*
Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{\sinh x - \sinh y}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition A de f. Montrer qu'il est ouvert.
2. En quels point de A f est-elle continue ?
3. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 238 – *Mines 2017 [9/10]*

1. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il $\varphi : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$?
2. Même question dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   On pourra composer φ avec le déterminant.

10.4 Indications

Exercice 224 – Si φ est nulle sur $[a, b]$ avec $a < b$, on construit f non nulle telle que $N_\varphi(f) = 0$, ce qui montre le sens direct de la première équivalence par la contraposée. Pour le sens indirect, le fait d'avoir $\|f\phi\|_\infty = 0$ impose $f\varphi = 0$, et si f était non uniformément nulle, alors en ce plaçant sur un voisinage d'un point de non-annulation, par continuité de f, on obtiendrait un intervalle non trivial où φ est nulle. Pour la deuxième équivalence : on a toujours le contrôle $N_\varphi(f) \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_\infty$, et si φ ne s'annule pas alors on peut considérer son minimum m, qui est strictement positif ; fournissant $N_\varphi(f) \geqslant m \|f\|_\infty$. Réciproquement si $\varphi(x_0) = 0$ alors on peut prendre des chapeaux pointus f_n autour de x_0 sur une largeur de $1/n$: on fait en sorte d'avoir $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N_\varphi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, interdisant un contrôle de la forme $\|f\|_\infty \leqslant K N_\varphi(f)$.

Exercice 225 – On peut s'approcher de 0 sans l'atteindre, et on peut de même prendre des valeurs arbitrairement grandes. L'étude de la Hessienne montre que f possède en $(0, 1)$ un minimum local, et présente en $(0, \mathrm{e}^{-2})$ un point-col (vérifié visuellement avec Wolfram-Alpha).

Exercice 226 – On pose $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \pi/2[$, et l'équation devient (avec une quantification à soigner) $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = \alpha g$ puis $g(r, \theta) = \varphi(\theta)r^\alpha$ et enfin

$$f(x, y) = \varphi\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

Pour la deuxième équation, $g(r, \theta) = \varphi(\theta)\mathrm{e}^r$.

Exercice 227 – J'ai (évidemment !) commencé par la dernière question... $f(x, 0) - f(0, 0)$ prend des valeurs strictement positives et d'autres strictement négatives au voisinage de $x = 0$, donc f ne possède pas d'extrémum local en $(0, 0)$. Ensuite, $2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) = 0$ donc pour $t \neq 0$, $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) = 0$. En faisant tendre t vers 0^+ on obtient bien $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
Rolle entre $-t^3$ et t^3 donne l'existence de $\gamma(t)$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) = 0$, et on fait tendre t vers 0.

Exercice 228 – $P(1) = P(0) + \displaystyle\int P'(t)dt$ suivi d'inégalités triangulaires montre que $N_1 \leqslant 2N_0$. Cette constante 2 convient encore pour a et b dans $[0, 1]$. Si $a, b > 1$ sont distincts, alors (par exemple si $a > b$) le rapport $\dfrac{N_a(X^n)}{N_b(X^n)}$ n'est pas majoré. Bien entendu en dimension finie les normes sont équivalentes.

Exercice 229 – Faire un dessin. Revenir à la définition (ne pas se jeter sur les hypothèses mais regarder ce qu'on veut montrer, comme d'habitude...).

Exercice 230 – Si $f \in E$ et qu'on note m son minimum (fonction continue sur un segment) alors ce minimum est strictement positif, et la boule de centre f et de rayon $m/2$ est incluse dans E. Pour l'adhérence, elle est clairement incluse dans l'ensemble des fonctions à valeurs positives (au sens large). Et réciproquement si $f \in E$ est à valeurs positives, alors chaque $f_n = f + 1/n$ est dans Ω, et (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 231 – L'application linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$ est 1-lipschitzienne donc continue, par exemple. Ensuite, si $f \in A$ alors $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - 1)dt = 0$, donc l'application **continue** $f - 1$ ne saurait être à valeurs négatives (au sens large) puisqu'elle prend (en 0) au moins une valeur strictement négative.

Exercice 232 – L'application $(u, v) \mapsto u^2 + 2v^2$ doit faire le job, mais pas $(u, v) \mapsto (u + v)^2$... Si on note $A = f(0)$: il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| \geqslant R$, on a $f(x) \geqslant A + 1$. Par ailleurs f est continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R (qui est borné fermé bien entendu) donc possède un minimum sur ce disque... qui sera le minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 233 – Au voisinage de l'unique point critique $(0,0)$ on peut se balader et prendre des valeurs >0 et d'autres <0 via $f(0,t)$. L'existence des extrema est assurée par continuité sur un fermé borné (en dimension finie). Ce maximum ne peut être pris à l'intérieur de la boule (sans quoi ce serait un point critique...) donc c'est sur le cercle, sur lequel $x^2 = 1 - y^2$... Finalement, les extrema sont respectivement de -1 et $5/4$.

Exercice 234 – Joli exercice ! Pour f on trouve 5 points critiques $(0,0,\ (0,\pm 1)$ et $(\pm\sqrt{2},0)$ Puisque $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$ (point intéressant à détailler !) on est assuré d'un maximum pris en un point critique ; c'est donc $f(0,1) = 2\mathrm{e}^{-1}$.
Pour φ, il convient évidemment de se placer dans une base orthonormée de diagonalisation dans laquelle on a essentiellement : $\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) \mathrm{e}^{-\sum x_i^2}$.
Outre $(0,0)$, les points critiques sont les x pour lesquels il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$, $\sum \lambda_i x_i^2 = \lambda_{i_0}$, et $x_i = 0$... pour tout i tel que $x_{i_0} \neq 0$ (attention aux valeurs propres multiples !) ; ces points sont donc des vecteurs propres. Il reste à maximiser (en $\|x\|$ et en i) $\lambda_i \|x\| \mathrm{e}^{-\|x\|^2}$, et on trouvera $\lambda \mathrm{e}^{-1}$, avec λ la plus grande valeur propre de u.

Exercice 235 – $\mathcal{S}$ est définie par une relation de la forme $f(M) = 1$, et le plan tangent à $\mathcal{S}$ possède un vecteur normal simple... dont on cherche à savoir s'il est parallèle à un vecteur normal de $\mathcal{P}$: par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ On trouve finalement comme unique point : $(1,-1,-1)$.

Exercice 236 – On prend $x_0 \in U$ et on cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0,\varepsilon) \subset U$. Il existe $a_0 \in U$ tel que $x_0 \in B_f(a_0,1)$ et comme U est ouvert, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B(a_0,\varepsilon_0) \subset U$. Je serais alors bien tenté (après un dessin) de montrer que $B(x_0,\varepsilon_0) \subset U$. Pour cela, je prends $y_0 \in B(x_0,\varepsilon_0)$ et je cherche $a \in U$ tel que $\|a - y_0\| \leqslant 1$. En faisant vivre le dessin, je suis tenté d'écrire : $y_0 = (a_0 + (y_0 - x_0)) + (x_0 - a_0)$...
Vous n'avez pas fait de dessin et donc rien compris à la dernière ligne ? Relisez cette phrase et méditez !

Exercice 237 – C'est assez culturel : pour traiter ce genre d'expression, la formule de Taylor avec reste intégral suivie d'un changement de variable pour se ramener à $[0,1]$ donne

$$\sinh(x) - \sinh(y) = (y-x)\int_0^1 \cosh\left(x + (y-x)u\right) du.$$

On écrit la même chose avec le numérateur, et on se retrouve ainsi avec une fraction de termes qui sont des intégrales avec comme paramètres (x,y). Il faut alors « interpoler » les théorèmes au programmes de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^2$ (pour le domaine de vie des paramètres), et tout va bien puisque le numérateur et le dénominateur tendent vers 1 lorsque (x,y) tend vers (x_0,x_0).

Exercice 238 – Une façon de procéder est de relier toute matrice inversible continûment à I_n (puis faire de la soudure sur les chemins). Pour cela, on peut par exemple noter que des opérations élémentaires (transvections et échanges de ligne) permettent de ramener une matrice inversible à une matrice diagonale avec des éléments diagonaux non nuls. Il reste à trouver un chemin continu entre tout complexe non nul et 1 : facile (faites un dessin, misérables !)... mais aussi à relier toute matrice de transvection à l'identité (facile) et enfin les matrices d'échanges à l'identité. Si on y arrive sur $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est gagné. Et pour passer de I_2 à $S = P\,\mathrm{Diag}(1,-1)P^{-1}$ je passerais bien par $P\,\mathrm{Diag}(1,\mathrm{e}^{i\pi t})P^{-1}$...
Si $\det(A) > 0$ et $\det(B) < 0$, alors un éventuel chemin φ reliant A à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifierait, en posant $\psi = \det \circ \varphi$: $\varphi(0) > 0 > \varphi(1)$, imposant (par continuité, via le théorème des valeurs intermédiaires) à ψ de s'annuler, donc à φ de quitter $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.