C'est parti !

À rendre le lundi 8 septembre 2025 dernier délai.

Ce DM est à rédiger directement sur cette feuille recto-verso... après avoir « éventuellement » fait un brouillon !
Je vous demande de ne pas consulter votre cours de première année. Il s'agit de faire un bilan à l'instant t_0 de ce que vous savez faire effectivement, et de votre qualité de rédaction. Nous avons un certain temps pour reprendre/améliorer tout ça.
Pour chaque exercice, je vous demande d'estimer votre niveau de confiance en ce que vous avez écrit : 1/10 signifie que vous avez fait du remplissage... dont vous n'êtes pas dupes ! 9/10 signifie que vous êtes à peu près certain du caractère correct de ce que vous avez fait (ce qui inclus la rédaction !). Une estimation de 5/10 signifie que vous pensez avoir à peu près fait le travail, en étant conscient que la rédaction est probablement défaillante (mais que vous ne savez pas trop comment faire mieux). Essayez de vous auto-évaluer honnêtement, de façon ni optimiste ni pessimiste.

1 Composition d'injections

Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
Il est interdit d'écrire le moindre symbole $\Rightarrow$, et encore moins $\Leftrightarrow$
On commencera impérativement par dessiner trois patates, nommer les trois ensembles et les deux applications en jeu.

Niveau de confiance en votre solution : /10

2 Une limite

Montrer que $(\cos(1/n))^{n^2}$ possède une limite quand n tend vers $+\infty$.

Niveau de confiance en votre solution : /10

3 Image surjective d'une famille génératrice

Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective et $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice de E, alors $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une famille génératrice de F. (E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels)

Niveau de confiance en votre solution : /10

4 Complexes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\{z \in \mathbb{C}\,;\ z^n = 1\} = \{\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$

Il est interdit d'écrire le moindre symbole $\Rightarrow$, et encore moins $\Leftrightarrow$

Niveau de confiance en votre solution : /10

5 Une décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$: $F = \dfrac{X^2 + X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+1)}$.

Il est interdit de procéder à je ne sais quelle identification si on ne sait pas précisément ce que ça veut dire.

Niveau de confiance en votre solution : /10