

## Suites et séries numériques

## 1 Suites réelles

### 1.1 Convergences

**Exercice 1** – Mines 2021 [3/10] - Louis G.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un unique réel  $u_n$  tel que  $u_n e^{u_n} = n$ .
2. Donner un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Exercice 2** – X 2011 [5/10]

Déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}$ .

**Exercice 3** –  $u_{n+1} = f(u_n)$  [5/10]

Étudier, en fonction de la valeur  $u_0$ , le comportement des suites  $(u_n)$  vérifiant la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $f : x \mapsto 1 + x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{2}$ .

**Exercice 4** – Récurrence linéaire d'ordre 2 [3/10]

Déterminer les suites  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $g_{n+2} = 999g_{n+1} - g_n$  et qui sont bornées.

### 1.2 Comportements asymptotiques

**Exercice 5** – TPE 2017 [6/10]

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant  $u_0 \in ]0, \pi/2]$ , avec  $u_{n+1} = \sin u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $u_n^3 \sim 6(u_n - u_{n+1})$  et que  $u_n^2 \sim 6 \ln \frac{u_n}{u_{n+1}}$ .
2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n^p$ .

**Exercice 6** – Une asymptote [4/10]

Montrer que le graphe de l'application  $x \mapsto (x^2 + 3x + 4) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  possède une asymptote. Donner les positions relatives.

**Exercice 7** – Un équivalent pour une suite hypergéométrique [6/10]

Déterminer un équivalent simple de  $\sum_{k=1}^n k!$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## 2 Séries à termes positifs

### 2.1 Des convergences ; cas concrets

**Exercice 8** – CCINP [3/10]

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs, telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$ . Montrer que  $\sum u_n$  converge.

2. Déterminer la nature de  $\sum \frac{n}{(3n+1)!}$ .

**Exercice 9** – Avec Arccos [6/10]

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n^2)\right)$  est-elle convergente ?

**Exercice 10** – CCINP [5/10]

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ .

**Exercice 11** – CCINP [6/10]

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Donner la nature des séries de terme général  $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$  et  $v_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6}$ .

**Exercice 12** – CCINP [4/10]

Étudier les séries de terme général  $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ ,  $v_n = \frac{e^{-\sqrt{\ln n}}}{n}$  et  $w_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ .

**Exercice 13** – En prévision des séries de fonctions [5/10]

Pour quels  $x \in \mathbb{R}$  la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^x}{2^n}$  est-elle convergente ? Et (pour  $x > 0$ )  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 x^{-n}$  ?

**Exercice 14** – CCINP [5/10]

Soit  $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur  $(a, b, c)$  pour que  $\sum_n u_n$  soit convergente.

**Exercice 15** – Mines [4/10]

On considère la suite de terme général  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n}$ .  
Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Quelle est sa limite ?

## 2.2 Des convergences : situations plus théoriques

**Exercice 16** – CCINP 2022 [6/10] - Anna B.

Soit  $(a_n)_{n>0}$  une suite de réels positifs. On définit la suite  $(u_n)_{n>0}$  de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)}.$$

1. Exprimer  $u_1 + u_2$  à l'aide de  $\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$  puis généraliser.
2. Montrer que  $\sum u_n$  converge.
3. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  lorsque  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Exercice 17** – Règle de Duhamel – vieillerie absurde [7/10]

On suppose que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est une série de réels strictement positifs tels que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(1/n)$ .

- si  $\alpha > 1$  alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge ;
- si  $\alpha < 1$  alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.

On pourra comparer  $u_n$  à  $\frac{1}{n^\beta}$ , avec  $\beta$  coincé strictement entre  $\alpha$  et 1 : en posant  $r_n = \frac{u_n}{1/n^\alpha}$ , que dire de  $\frac{r_{n+1}}{r_n}$  ?

**Exercice 18** – *Peut-être lié à ce qui précède... [4/10]*

Donner, en fonction de  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ , la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$ .

**Exercice 19** – *CCINP 2015 [3/10]*

Pour  $\alpha > 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

1. Montrer :  $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .
2. Étudier la convergence de  $\sum \frac{R_n}{S_n}$ .

**Exercice 20** – *Centrale 2017 [7/10]*

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^a}{n^2}\right)$ .

1. On suppose :  $a = 2$ . Montrer que  $(u_n)_{n>0}$  diverge.
2. On suppose :  $a \in [0, 1]$ .
  - (a) Étudier la convergence de  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^a}{n^2}$  et, en cas de convergence, trouver la limite.
  - (b) Même question avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 2.3 Calculs de somme

**Exercice 21** – *Ce sera plus facile dans quelques semaines [5/10]*

Justifier la convergence et calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ .

N'y aurait-il pas lieu de faire intervenir  $f_N : x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n$  ? La quantité  $f'_N(1/2)$  doit être intéressante...

**Exercice 22** – *St Cyr 2009 [2/10]*

Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ .

**Exercice 23** – *Mines 2010 [6/10]*

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{n(n+1)(n+2)}$  converge, et calculer sa somme.

## 2.4 Divers

**Exercice 24** – *CCINP [5/10]*

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ . On suppose :  $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

- si  $\ell > 0$ , alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  diverge ;
- si  $\ell < 0$ , alors cette série converge ;
- si  $\ell = 0$ , alors... on ne peut rien dire !

**Exercice 25** – *Mines 2011 [6/10]*

1. Donner la nature de  $\sum \frac{\ln n}{n}$ .
2. Montrer que  $S_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$  (on parle de sommes partielles...).

3. Montrer que  $S_n - \frac{\ln^2 n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ .

### 3 Séries alternées

**Exercice 26** – CCINP 2015 [2/10]

Donner la nature de la série de terme général  $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$

**Exercice 27** – CCINP [6/10]

Calculer  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ .

**Exercice 28** – CCINP [5/10]

Étudier la convergence de  $\sum_{n \geq 1} v_n$ , avec  $v_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$ .

**Exercice 29** – Une série de fonctions [2/10]

Pour quels  $x \in \mathbb{R}$  la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n n^{-x}$  est-elle convergente ?

### 4 Quelques derniers pour la route

**Exercice 30** – Des séries entières [8/10]

Pour quels  $z \in \mathbb{C}$  la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n^2}$  est-elle convergente ? Et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$  ?

*L'essentiel de la difficulté réside dans l'étude de ce qui se passe aux bords...*

**Exercice 31** – Centrale 2015 [4/10]

1. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels qui converge vers 0. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $b_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ . La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle nécessairement ?
2. Montrer que la suite de terme général  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$  est convergente.

**Exercice 32** – Contre-exemple de Cauchy [6/10]

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

Que dire des séries  $\sum u_n$ ,  $\sum v_n$  ainsi que de leur produit de Cauchy  $\sum w_n = \sum u_n \sum v_n$  ?

### 5 Posés en colle

**Exercice 33** – C. Stérin 2023-2024 [7/10]

On suppose que  $a_0 > 0$ , et :  $a_{n+1} = 1 - \exp(-a_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Établir la convergence de  $(a_n)$ .
2. Donner un équivalent simple de  $a_n^2$  quand  $n \rightarrow \infty$  puis la nature de  $\sum a_n^2$ .
3.  $\sum (-1)^n a_n$  est-elle convergente ? Et  $\sum \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$  ?
4. Donner la nature de  $\sum a_n$ .

**Exercice 34** – C. Stérin 2023-2024 [3/10]

Convergence et calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

**Exercice 35** – B. Saleur 2023-2024 [2/10]

Nature et somme de  $\sum \frac{\cos(n)}{2^n}$ .

**Exercice 36** – B. Saleur 2023-2024 [1/10]

Nature de  $\sum \frac{n2^n}{n^2 + 3^n}$ .

**Exercice 37** – B. Saleur 2023-2024 [3/10]

Nature des suites vérifiant  $u_0 \geq 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 38** – B. Saleur 2023-2024 [3/10]

Nature de  $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ .

## 6 Des indications

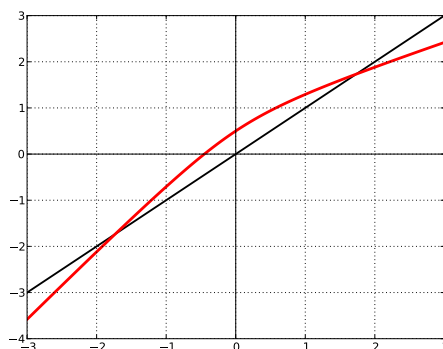
*Exercice 1* – Théorème de la bijection (avec les trois hypothèses!) La conclusion fournit en particulier le fait que la bijection réciproque tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , ce qui permet d'écrire :  $\ln(n) = u_n + \ln(u_n) \sim u_n$ .

*Exercice 2* –  $\ln(u_n) = \frac{\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n})}{\sin(n\pi(1 + 1/n^2)^{1/2})} \cdots$  et on cherche la limite de ce quotient DONC ICI un équivalent simple. Facile pour le numérateur. Pour le dénominateur, on a quelque chose de la forme

$$\sin\left(n\pi\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)\right)\right)$$

et on a vaguement en tête que  $\sin(x + \pi) = \dots$  donc  $\sin(x + n\pi) = \dots$

*Exercice 3* – On commence par une étude rapide pour obtenir le graphe de la fonction en jeu...



Il y a donc 3 situations génériques à traiter en plus des deux cas particuliers.

*Exercice 4* – Sans les calculer, je sais que exactement une des deux racines de  $X^2 - 999X + 1$  est de module majoré par 1...

*Exercice 5* – Déjà (calmement...)  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Ensuite, le développement limité  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  donnera d'une part  $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim \frac{u_n^3}{6}$  et d'autre part  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin(u_n)}{u_n} = u_n \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$ . Pour la dernière question,  $\sum (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$  converge si et seulement si  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Appliqué à  $\alpha_n = u_n$  on obtient la convergence de  $\sum u_n^3$ ; appliqué à  $\alpha_n = \ln(u_n)$  on obtient la divergence de  $\sum u_n^2$ .

*Exercice 6* – `> asymlt((x**2+3*x+4)*ln(1+1/x),x,2);`

$$x + \frac{5}{2} + \frac{17}{6x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

*Exercice 7* – pour montrer que la somme  $S_n$  est équivalente à son dernier terme, on majore  $S_n - n!$  par  $(n-2) \times (n-2)! + (n-1)!\dots$

*Exercice 8* – On place quelque chose entre  $\ell$  et 1 : par exemple  $\beta = \frac{\ell+1}{2}$ . À partir d'un certain rang on aura  $u_{n+1} \leq \beta u_n$ , permettant de contrôler  $(u_n)$  par une suite géométrique de raison  $\beta < 1$ .

*Exercice 9* – D'une part,  $\text{Arctan}(n^2) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{n^2}$ . D'autre part, en écrivant  $\theta = \text{Arccos}(1-u)$  puis en regardant  $\cos \theta$  de deux façons différentes, on obtient  $\text{Arccos}(1-u) \sim \sqrt{2u}$ , de sorte que  $u_n \sim \frac{K}{n} \dots$

*Exercice 10* – Par exemple avec Stirling :  $\ln u_n \sim -n \ln n$  donc  $\ln(u_n) \leq -n$  à partir d'un certain rang, donc  $0 \leq u_n \leq e^{-n}$  pour  $n$  assez grand. On peut aussi d'Alembertiser.

*Exercice 11* –  $\ln u_n \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{6}$  et  $v_n \sim \frac{K}{n^2}$ .

*Exercice 12* –  $u_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$ ,  $n \ln^2 n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et  $w_n = \frac{\pi}{2n}(-1)^n + O(1/n^3)$ .

*Exercice 13* – C'est moralement  $2^n$  qui l'emporte, donc on veut prouver la convergence ; on va donc regarder  $\frac{u_n}{1/n^2} \dots$ . Pour la seconde série, c'est  $x^{-n}$  qui doit remporter le morceau. On discute donc en fonction de la position de  $x$  vis-à-vis de 1...

*Exercice 14* – Déjà il est nécessaire que  $u_n$  ne tende pas vers  $+\infty$  ! En factorisant  $\sqrt{n}$  on obtient donc une première condition nécessaire. Ensuite, il est nécessaire que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \dots$ . Début de synthèse : si ces conditions sont vérifiées, on a (peut-être) un équivalent simple de  $u_n$ , nous fournissant une nouvelle condition nécessaire... qui s'avère être suffisante grâce à un terme supplémentaire. Très bon exercice de raisonnement/calcul élémentaires.

*Exercice 15* – Comparaison somme-intégrale (pour la convergence), ou somme de Riemann... ou encore utilisation du développement asymptotique  $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \dots$  et ça converge vers  $\ln 2$ .

*Exercice 16* – J'ai trouvé en deux temps :  $u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$ . Il s'agit alors d'étudier  $(\delta_n)$  définie par  $\delta_n = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$ . On a bien envie de prendre son logarithme, pour trouver une somme partielle de série à termes négatifs : cette somme partielle va donc ou bien converger, ou bien tendre vers  $-\infty$ . Dans les deux cas, son exponentielle, c'est-à-dire  $\delta_n$ , converge. Dans l'exemple, la série à termes négatifs diverge, donc son exponentielle tend vers 0, donc  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$ .

*Exercice 17* – On compare  $u_n$  à  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$  via  $r_n = \frac{u_n}{v_n}$ . Si par exemple  $\alpha > 1$ , on montre la convergence en fixant  $q \in ]1, \alpha[$  ; le rapport  $\frac{r_{n+1}}{r_n}$  est alors majoré par 1 à partir d'un certain rang ; etc.

*Exercice 18* – Utiliser l'exercice précédent ! (pffff)

*Exercice 19* – Pour le premier point, c'est du cours (comparaisons soigneuses somme/intégrale). Et puisque  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0$ , la deuxième question n'est pas très difficile !

*Exercice 20* – Je vois (presque) une somme de Riemann, après avoir pris le logarithme de  $u_n$  lorsque  $a = 2$ . Ensuite, j'écrirais bien  $a_n = n^{a-1} \frac{1}{n} \sum \dots$  pour faire apparaître une autre somme de Riemann. Enfin, l'encadrement  $0 \leq \ln \left( 1 + \frac{k^a}{n^2} \right) \leq \frac{k^a}{n^2}$  doit permettre de conclure.

*Exercice 21* – `> sum(n/2**n,n=0..infinity);`

> limit(subs(x=1/2,x\*diff(sum(x\*\*n,n=0..N),x)),N=infinity);

2

*Exercice 22* – Décomposition en éléments simples. On voudra bien trouver  $\frac{1}{2}$ .

*Exercice 23* – Collisionner avec soin...  $S = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}$ .

*Exercice 24* – Pour le cas  $\ell > 0$  : on aura  $(\ln(f(t)))' > \frac{\ell}{2}$  pour  $t \geq n_0$ , et alors  $f(n) \geq f(n_0)e^{\ell(n-n_0)/2}$  pour tout  $n \geq n_0$ , soit encore :  $f(n) \geq K\rho^n$ , avec  $K > 0$  et  $\rho > 1$ .

*Exercice 25* – Comparaison somme/intégrale.

*Exercice 26* –  $u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + O(1/n^2)$ ... Attention, l'équivalent ou un  $o(1/n)$  ne suffit pas !

*Exercice 27* – Collisionner après une décomposition en éléments simples.

> sum((-1)\*\*n/(n\*(n-1)),n=2..infinity);

$-1 + 2 \ln 2$

*Exercice 28* –  $v_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ , donc il y a convergence.

*Exercice 29* – C'est grossier ou alterné.

*Exercice 30* – Dans le premier cas, la convergence est absolue ( $|z| \leq 1$ ) ou la divergence grossière ( $|z| > 1$ ). Dans le second, les cas litigieux  $|z| = 1$  sont convergents (pour  $z \neq 1$ ) par transformation d'Abel (difficile et hors programme, donc!).

*Exercice 31* – La suite  $(\ln b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut ne pas converger pour plein de raisons (bien que  $\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ). Prenons par exemple  $a_k = \frac{1}{k}$  (on peut même calculer  $b_n$  dans ce cas). Prendre le logarithme reste une bonne idée pour la deuxième question.

*Exercice 32* – Le produit de Cauchy  $\sum w_n = \sum u_n \sum v_n$  vérifie pour  $n \geq 1$  :  $w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ .

Or pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on a  $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$  (tracer une jolie parabole), donc  $|w_n| \geq \frac{n-1}{n\sqrt{2}}$  donc  $\sum w_n$  diverge grossièrement.

*Exercice 33* – De façon standard,  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ensuite  $a_n^2 \sim 2(a_n - a_{n+1})$  donc  $\sum a_n^2$  est de même nature que... donc converge. Ensuite, série alternée puis de même nature qu'une certaine suite. Enfin,  $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{a_n}{2} + O(a_n^2)$ .

*Exercice 34* – Série alternée ; les sommes partielles font apparaître des produits télescopiques qui se travaillent « à la Wallis », et doivent permettre de conclure avec peut-être un coup de Stirling.

*Exercice 35* –  $O(1/2^n)$  pour la convergence. Partie réelle de quelque chose qu'on sait sommer pour le reste.

*Exercice 36* –  $\sim n(2/3)^n = o(1/n^2)$  par exemple.

*Exercice 37* – Dessin, point fixe, intervalles stables...

*Exercice 38* – Je trouve  $u_n = \cos(n\pi + \pi/2 + K/n + O(1/n^2)) = (-1)^n \sin(\dots)$

