Réduction

1. Définitions :
   — Le *spectre* de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble de ses *valeurs propres*, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (il existe des $x \in E$ non nuls tels que $u(x) = \lambda x$: les *vecteurs propres*. Le *sous-espace propre* associé à λ est $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.
   — Un endomorphisme est *diagonalisable* lorsque (au choix) : il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale ; ou bien l'espace est somme (directe) des sous-espaces propres de cet endomorphisme.
   — Une matrice A est diagonalisable lorsque l'endomorphisme canoniquement associé l'est. Ce qui revient à l'existence d'une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
   — Un endomorphisme est *trigonalisable* lorsqu'il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est triangulaire.
   — Le *polynôme caractéristique* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant de $XI_n - A$. C'est un polynôme unitaire de degré n.
2. Théorèmes :
   — Les $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe. *C'est en général utilisé pour les valeurs propres λ, mais ça reste vrai si ces noyaux sont réduits à $\{0\}$.*
   Formulation voisine : une famille de vecteurs propres associés à des vap différentes est libre.
   — Pour qu'un endomorphisme/une matrice soit diagonalisable il est *nécessaire* que son polynôme caractéristique soit scindé. *Et ce n'est pas suffisant : contre-exemple ?*
   — Pour qu'un endomorphisme/une matrice soit diagonalisable il est *suffisant* que son polynôme caractéristique soit scindé à racines simples. *Et ce n'est pas nécessaire : contre-exemple ?*
   — Pour qu'un endomorphisme/une matrice soit diagonalisable il est *nécessaire et suffisant* que son polynôme caractéristique soit scindé et que pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé ait pour dimension la multiplicité de la valeur propre *(comme racine du polynôme caractéristique).*
   — Pour qu'un endomorphisme/une matrice soit diagonalisable il est *nécessaire et suffisant* qu'il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
   — Le polynôme caractéristique est annulateur (Cayley-Hamilton). Ses racines sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme/la matrice.
   — Pour un polynôme annulateur quelconque, on a $\operatorname{Sp}(u) \subset \operatorname{Rac}(P)$. *Preuve ? Contre-exemple pour l'autre inclusion ?*
   — Si deux endomorphismes commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
   — Un endomorphisme/une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. *C'est en particulier toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Contre-exemple de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?*
   — La dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre.
   — Les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale.
   — (Bof...) Si $\chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ alors $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(u)$ et $a_0 = (-1)^n \det(u)$. *Preuve ?*
3. Connaître/savoir faire aussi :
   — Diagonalisation d'une matrice : géométrisation rapide conseillée, calcul correct de χ_A, $\operatorname{Sp}(A)$, dimensions des sous-espaces propres via le rang, calcul effectif d'une base des sous-espaces propres, et bonne matrice de passage !
   — Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable. Deux preuves qu'il faudrait savoir faire : via les noyaux itérés, ou via le polynôme caractéristique.
   — Trigonalisation effective : ce serait bien de savoir le faire seul en dimension 3.
   — Diagonalisation (éventuelle) rapide des matrices de rang 1 concrètes et théoriques. Matrice Attila (des 1 partout) et cousines (combinaisons linéaires de la précédente et de I_n).

— Savoir rapidement étudier la diagonalisabilité d'une triangulaire via la dimension des sous-espaces propres (calculs de rang).
— Déterminer $\mathcal{C}(u)$ lorsque $|\mathrm{Sp}(u)| = \dim(E)$. Même chose avec $P(v) = u$ (analyse : ça commute, les sous-espaces propres gnagna, donc la matrice de v dans telle base est elle-même diagonale, etc. Synthèse. Conclusion).
— Savoir construire des exemples simples de matrices non diagonalisables, non trigonalisables, à spectre/multiplicités imposé.
— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (coefficients dans $[0, 1]$, somme égale à 1 sur chaque ligne) alors ses valeurs propres (complexes) sont toutes de module majoré par 1.
Pas au programme, mais ce serait bien de savoir le prouver : écrire $AX = \lambda X$, et se placer sur une ligne maximisant $|x_i|$...