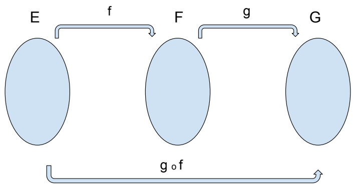
1 Composition d'injections

Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.
On commence par les patates, comme il se doit, ce qui fixe les notations :



Supposons que f est une application injective de E dans F et que g est une application injective de F dans G. On va montrer que $g \circ f$, qui est une application de E dans G, est injective.
On fixe pour cela $x_1, x_2 \in E$ tels que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$... et on espèce montrer que $x_1 = x_2$.
On a $g\Big(f(x_1)\Big) = g\Big(f(x_2)\Big)$, donc par injectivité de g on peut en déduire que $f(x_1) = f(x_2)$. L'injectivité de f permet ensuite de dire que $x_1 = x_2$, ce qu'on souhaitait démontrer.

$$\boxed{\text{La composée de deux injections est bien une injection.}}$$

2 Une limite

Montrer que $(\cos(1/n))^{n^2}$ **possède une limite quand** n **tend vers** $+\infty$**.**
On a $(\cos(1/n))^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos(1/n)\right)\right)$. Or $\cos(1/n) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ et $\ln(1+u) \sim u$ donc

$$\ln\left(\cos(1/n)\right) \sim -\frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

donc $n^2 \ln\left(\cos(1/n)\right) \sim -1/2$ donc $n^2 \ln\left(\cos(1/n)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1/2$ puis **par continuité** de la fonction exponentielle :

$$\boxed{(\cos(1/n))^{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1/2}.}$$

3 Image surjective d'une famille génératrice

Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ **est surjective et** $(e_1, ..., e_n)$ **est une famille génératrice de** E**, alors** $(u(e_1), ..., u(e_n))$ **est une famille génératrice de** F**. (**E **et** F **sont deux** $\mathbb{K}$**-espaces vectoriels)**
Sous les hypothèses de l'énoncé, on fixe $y \in F$ et on souhaite montrer qu'il est combinaison linéaire des $u(e_i)$. Il semble assez raisonnable d'utiliser la surjectivité de u qui nous fournit l'existence de $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Mais $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice de E, donc il existe des scalaires λ_i tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. En appliquant u et en utilisant sa linéarité on obtient alors

$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u(e_i),$$

ce qu'on souhaitait démontrer.

$$\boxed{\text{L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est bien génératrice.}}$$

4 Complexes

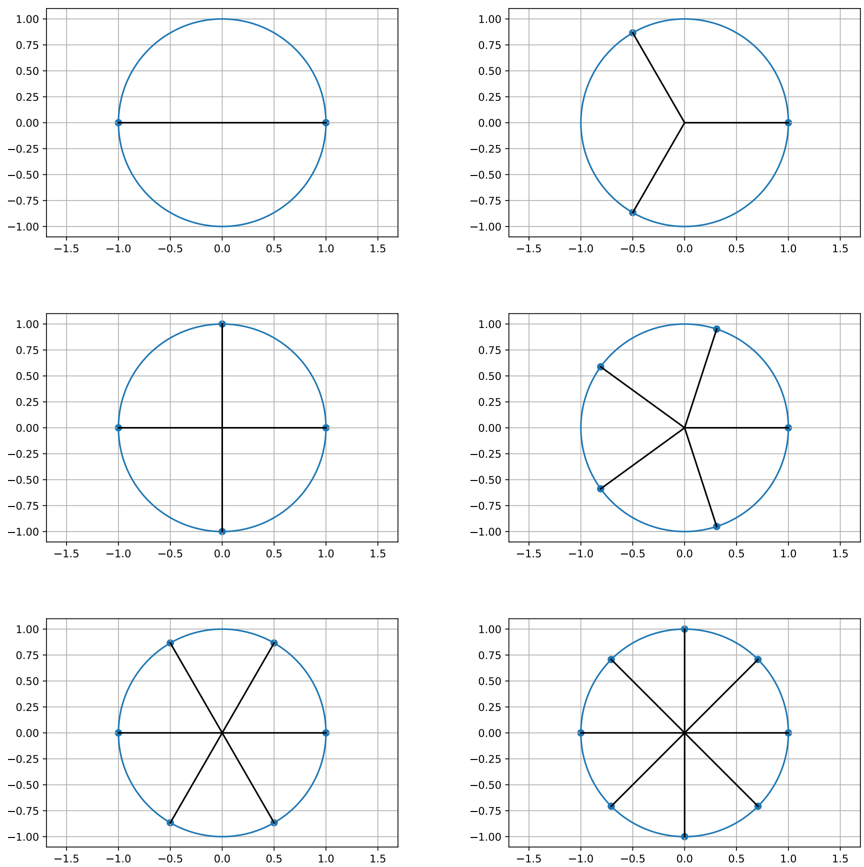
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\{z \in \mathbb{C}\,;\ z^n = 1\} = \{\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \,|\, k \in [\![0, n-1]\!]\}$

Notons E_1 l'ensemble de gauche et E_2 celui de droite.

— L'inclusion $E_2 \subset E_1$ est une simple vérification : si $z \in E_2$ alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, et on a alors $z^n = \mathrm{e}^{2ik\pi} = 1$, donc $z \in E_1$.

— Réciproquement : si $z \in E_1$, on l'écrit $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ (en cherchant la preuve au brouillon vous avez probablement écrit $\theta \in \mathbb{R}$ dans un premier temps, avant de réaliser en fin de preuve que pour localiser k, il était pratique de localiser θ dans l'intervalle suffisant $[0, 2\pi[$...).
On a $\rho^n \mathrm{e}^{ni\theta} = 1$, donc en observant le module on a $\rho^n = 1$, ce qui impose (puisque ρ est un réel positif) : $\rho = 1$. On obtient ensuite $\mathrm{e}^{ni\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$.
Bien entendu personne n'aura écrit un charabia à base de $\mathrm{e}^{ni\theta} = \mathrm{e}^{2ik\pi}$ pour tout k donc... donc quoi ? Donc $n\theta = 2k\pi$ bien entendu ! Ce qu'on utilise c'est le fait que les seuls réels φ vérifiant $\mathrm{e}^{i\varphi} = 1$ sont ceux de la forme $2k\pi$ avec k entier.
Bref, $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, et il reste à localiser k, ce qu'on obtient facilement grâce à l'encadrement $0 \leqslant \theta < 2\pi$ qui fournit $0 \leqslant k < n$ et permet de conclure puisque k est entier.

Bonus : les ensembles en question pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$!



5 Une décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$: $F = \dfrac{X^2 + X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+1)}$.

La fraction a un degré strictement négatif (sans quoi il aurait fallu commencer par une division euclidienne), donc le théorème de décomposition en éléments simples nous assure l'existence de coefficients réels tels que :

$$F = \frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+2)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

Il est évidement hors de question de mettre tout ceci sous même dénominateur **et de procéder à je ne sais quelles identification, concept à manipuler avec la plus grande prudence... en tout cas cette année**. Par contre considérer la fraction $(X-1)F$ (sous ses deux formes) puis l'évaluer en 1 (et il n'est aucunement question de faire tendre X vers 1 !) fournit :

$$((X-1)F)(1) = a = \frac{3}{3\times 2} = \frac{1}{2}.$$

(On aura noté l'importance des parenthèses autour de $(X-1)F$...)
De même :

$$((X+2)F)(-2) = b = \frac{3}{-3\times 5} = -\frac{1}{5}.$$

On passe ensuite par $\mathbb{C}$ pour déterminer deux réels en même temps (par identification des parties réelles et imaginaires) :

$$\left((X^2+1)F\right)(i) = ci+d = \frac{i}{(i-1)(i+2)} = \frac{i}{-3+i} = \frac{i}{10}(-3-i) = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i,$$

donc $s = -\dfrac{3}{10}$ et $d = \dfrac{1}{10}$ et finalement :

$$\boxed{\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+2)(X^2+1)} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/5}{X+2} + \frac{-\frac{3}{10}X+\frac{1}{10}}{X^2+1}.}$$

Avant de passer à la suite j'ai fait deux petites vérifications peu coûteuses : que vaut $F(0)$? Et quelle est la limite de $tF(t)$ quand t tend vers $+\infty$? « D'une part... et d'autre part... »
Il reste à décomposer sur $\mathbb{C}$ le petit morceau :

$$G = \frac{-\frac{3}{10}X+\frac{1}{10}}{X^2+1} = \frac{-\frac{3}{10}X+\frac{1}{10}}{(X-i)(X+i)} = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\beta}{X+i},$$

ce qu'on fait par multiplication-évaluation :

$$((X-i)G)(i) = \alpha = \frac{1}{2i}\left(-\frac{3}{10}i + \frac{1}{10}\right) = -\frac{3}{20} - \frac{1}{20}i$$

et

$$((X+i)G)(-i) = \beta = \frac{1}{-2i}\left(\frac{3}{10}i + \frac{1}{10}\right) = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}i$$

En regroupant les morceaux :

$$\boxed{\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+2)(X^2+1)} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/5}{X+2} + \frac{-\frac{3}{20}-\frac{1}{20}i}{X-i} + \frac{-\frac{3}{20}+\frac{1}{20}i}{X+i}.}$$