

$\zeta(2)$ vs $\zeta(3)$ 1 Comme promis : $u_{n+1} = f(u_n)$

Voyons déjà la solution de ChatGPT :

Soit u la suite définie par $u_0=999$ et $u(n+1)=\tanh(u(n))$ pour tout n .

Montre moi que la suite u converge, et donne moi un équivalent simple

Réflexion durant 15s

Voici une preuve courte, puis l'équivalent demandé.

Convergence

1. **Encadrement.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\tanh x| \leq 1$. Donc $u_1 = \tanh(999) \in (0, 1)$ et ensuite $u_n \in (0, 1)$ pour tout $n \geq 1$.
2. **Monotonie.** Pour $x > 0$, on a strictement $\tanh x < x$. Ainsi, dès $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \tanh(u_n) < u_n \quad \text{et} \quad u_n > 0,$$

donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est **décroissante** et **minorée** par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.

3. **Identification de la limite.** Par continuité de $\tanh$,
 $\ell = \tanh(\ell)$. L'unique solution réelle de $x = \tanh x$ est $x = 0$
(car pour $x > 0$, $\tanh x < x$, et pour $x < 0$, $\tanh x > x$).
Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Équivalent simple

Au voisinage de 0,

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5).$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{3} + O(u_n^5) = u_n \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + O(u_n^4) \right).$$

Pose $v_n = \frac{1}{u_n^2}$. Alors

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + O(u_n^4) \right)^{-2} = v_n + \frac{2}{3} + O(u_n^2).$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, on obtient $v_{n+1} - v_n \rightarrow \frac{2}{3}$, donc

$$v_n \sim \frac{2}{3} n \quad \implies \quad u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}.$$

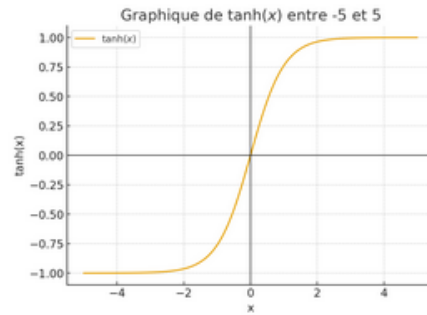
Conclusion. La suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$, converge vers 0, et

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}.$$

On notera la bonne démarche globale (et c'est assez bluffant) : localisation, monotonie, convergence. Il y a quelques passages un peu rapides, mais acceptables dans ce contexte où ChatGPT ne pouvait pas connaître le niveau de détail attendu. Je ne détecte a priori qu'une seule erreur¹. Vous l'avez ?

1. (a) La fonction $\tanh$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ (le fameux théorème de la bijection, dont vous oubliez entre une et trois des trois hypothèses demandées !)

1. En fait deux avec le symbole $\implies$ mal utilisé à la place de « donc » ou « ce qui implique ».



Voici le graphe de la fonction $\tanh(x)$ tracée sur l'intervalle $[-5, 5]$.

On peut par exemple écrire :

$$\begin{aligned} \text{th}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - 2 \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} \\ &= 1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

- (b) L'application $\delta : x \mapsto \text{th}(x) - x$ est de classe C^∞ , avec $\delta'(x) = -\text{th}^2 x$, quantité négative qui ne s'annule qu'en $x = 0$, donc δ est STRICTEMENT décroissante. Puisque $\delta(0) = 0$, on en déduit le signe de δ :

$$\begin{cases} \text{th}(x) > x & \text{si } x < 0 \\ \text{th}(x) < x & \text{si } x > 0 \\ \text{th}(0) = 0 \end{cases}$$

En particulier :

La fonction th possède un unique point fixe, qui est 0

- (c) On a $\frac{1}{\text{th}(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \text{th}(x)}{x \text{th}(x)}$. Le dénominateur est équivalent à x^2 , et le numérateur vaut $x^3/3 + o(x^3)$ donc est équivalent à $x^3/3$. Finalement :

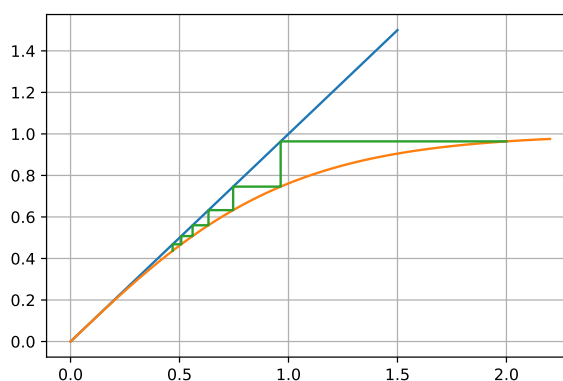
$$\frac{1}{\text{th}(x)} - \frac{1}{x} \sim \frac{x}{3} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Puisque $\text{th}^p(x) = x^p (1 - x^2/3 + o(x^3))^p = x^p - \frac{p}{3} x^{p+2} + o(x^{p+2})$, on trouve de la même façon

$\frac{1}{\text{th}^p(x)} - \frac{1}{x^p} \sim \frac{p}{3} x^{2-p} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et donc :

$$\frac{1}{\text{th}^p(x)} - \frac{1}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 & \text{si } p = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{si } p = 2 \\ +\infty & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

2. (a) Le dessin habituel...



ChatGPT étant un peu poussif pour comprendre ce que je voulais, je l'ai fait à la main avec Python :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import tanh, linspace

les_x = linspace(0, 1.5, 100)
plt.plot(les_x, les_x)
les_x = linspace(0, 2.2, 100)
les_y = tanh(les_x)
plt.plot(les_x, les_y)

un, suivant = 2, tanh(2)
les_x, les_y = [un], [suivant]
for _ in range(6):
    suisuivant = tanh(suivant)
    les_x.extend([suivant, suivant])
    les_y.extend([suivant, suisuivant])
    un, suivant = suivant, suisuivant

plt.plot(les_x, les_y)

plt.grid()
plt.savefig('escalier.pdf')
```

La fonction th étant croissante sur $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par th ($x \geq 0$ implique $\text{th}(x) \geq 0$), or $u_0 \in \mathbb{R}^+$, donc par récurrence immédiate tous les u_n sont dans $\mathbb{R}^+$.

Puisque $\text{th}(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, la localisation de (u_n) nous assure que $u_{n+1} = \text{th}(u_n) \leq u_n$ pour tout n , donc (u_n) est décroissante. Comme elle est de plus minorée (par 0, toujours grâce à la localisation), la suite u est convergente.

Si on note ℓ sa limite, alors d'une part $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, et d'autre part $\text{th}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \text{th}(\ell)$ par continuité de th , donc la relation $u_{n+1} = \text{th}(u_n)$ nous fournit, par unicité de la limite : $\text{th}(\ell) = \ell$ donc $\ell = 0$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

(b) Puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\text{th}^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{3}}$$

(c) En appliquant le théorème de Césàro (on décale en sommant de 0 à $n-1$, ce qui ne change

rien bien entendu) à la suite de terme général $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ on obtient $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$
donc $\frac{1}{nu_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$ puis $u_n^2 \sim \frac{3}{2n}$, puis par positivité de tout le monde :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

2 Un calcul classique

2.1 Racines d'un polynôme

1. En suivant la définition et en développant avec le binôme de Newton, on note qu'un terme sur 2 est éliminé (ce sera repris à la question 7 de façon systématique) :

$$P_1 = 3X^2 - 1 \text{ et } P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1$$

Déjà, $P_1 = 3(X^2 - 1/3) = 3(X - 1/\sqrt{3})(X + 1/\sqrt{3})$, donc P_1 n'est pas irréductible. Comme polynôme de degré > 2 , P_2 ne saurait être irréductible (même si vous ne voyez pas de racine : $(X^2 + 1)(X^2 + 2)$ n'a pas de racine réelle mais est irréductible).

$$\text{Ni } P_1 \text{ ni } P_2 \text{ n'est irréductible.}$$

Si on veut factoriser P_2 en produit d'irréductibles, on peut écrire $P_2 = Q(X^2)$ avec $Q = 5X^2 - 10X + 1 = 5(X - \alpha)(X - \beta)$, puis $P_2 = 5(X^2 - \alpha)(X^2 - \beta) = \dots$

2. En français : les complexes vérifiant $z^N = 1$ sont exactement ceux qui s'écrivent sous la forme $z = e^{2ik\pi/N}$ pour un certain $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Ou encore :

$$z^N = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket; z = e^{2ik\pi/N}$$

ou encore :

$$\{z \in \mathbb{C}; z^N = 1\} = \{e^{2ik\pi/N} \mid k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket\}$$

Tant que vous n'avez pas compris que ces trois assertions disent exactement la même chose, vous passez probablement à côté de quelque chose, et il est important de travailler cela maintenant : il en va de votre alphabétisation, cruciale pour le reste de l'année !

Passons maintenant à la preuve : il y a deux choses à faire (relisez chacune des trois assertions : elles disent toutes deux choses). Il n'est pas question de les faire en même temps.

- De façon quasi évidente on obtient une implication/inclusion : si z s'écrit $e^{2ik\pi/N}$ pour un certain entier k , alors $z^N = e^{2ik\pi} = 1$ ($e^{i\theta}$ ça vous parle ? Sur un dessin ?).
- Réciproquement, supposons que $z^N = 1$. Il existe alors $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$ (ben oui : ça vous parle le module et l'argument d'un complexe ? Oubliez tous les théorèmes que vous n'avez jamais su, et faites un dessin !). On a alors $z^N = \rho^N e^{Ni\theta} = 1$. En observant le module de ces complexes on obtient $\rho^N = 1$, donc $\rho = 1$ (oui : il existe un unique réel positif qui, mis à la puissance N vaut 1. Ce n'est pas un théorème mystérieux : observez le graphe de $t \mapsto t^N$ sur $[0, +\infty[$). Il vient alors $e^{Ni\theta} = 1$. Mais si on a compris ce que représente $e^{i\varphi}$ on sait que pour que ce complexe soit égale à 1 il faut que φ soit de la forme $2k\pi$ pour un certain entier k . Ainsi, $\theta = 2k\pi/N$. L'encadrement $0 \leq \theta \leq 2\pi$ nous assure que $0 \leq k < N$ puis que $0 \leq k \leq N-1$ car k est un entier.

On aura évité les petites blagues à base de « $e^{Ni\theta} = e^{2ik\pi}$ donc $N\theta = 2k\pi$ » bien entendu...

Très sérieusement, relisez et comprenez cette preuve : elle est caractéristique de ce qui est attendu cette année : des choses assez naturelles et raisonnables, exposées de façon claire.

3. Sans génie excessif :

$$P_n(i) = (2i)^{2n} = (-4)^n : i \text{ n'est pas racine de } P.$$

4. Les sigma c'est difficile donc on peut développer sous la forme : « premier terme plus deuxième terme plus gnagnagna plus dernier terme » (et si on vous a dit que ce n'était pas rigoureux, on vous a un peu menti).

$$P_n = \frac{1}{2i} ((X^{2n+1} + (2n+1)iX^{2n} + \dots) - (X^{2n+1} - (2n+1)iX^{2n} + \dots)) = (2n+1)X^{2n} + \dots$$

$$\boxed{P_n \text{ est de degré } 2n \text{ et coefficient dominant } 2n+1.}$$

Sérieusement, ce n'est pas le calcul avec des sigma qui va vous faire comprendre le calcul ! Évidemment (quoique...) j'aimerais que vous soyez capables de formaliser le calcul précédent avec des sigma, mais ce n'est PAS la priorité.

5. On a noté à la question 3 que i n'était pas racine. On fixe donc a différent de i , et on va résoudre $P_n(a) = 0$:

$$P_n(a) = 0 \iff (a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1} \iff \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$$

Cette dernière relation est équivalente à l'existence de $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ tel que $\frac{a+i}{a-i} = e^{2ik\pi/(2n+1)}$.

Maintenant, SI ON FIXE $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note que l'équation $(E_k) \frac{a+i}{a-i} = e^{2ik\pi/(2n+1)}$ est équivalente à $a+i = (a-i)e^{2ik\pi/(2n+1)}$ donc (développer, et regrouper à droite ce qui concerne a) à $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$.

Puisqu'on a fini par bien comprendre ce premier exo de l'année concernant les équations de la forme $\alpha x = \beta$, on s'intéresse au coefficient devant a : il est nul si et seulement si $e^{2ik\pi/(2n+1)} = 1$, c'est-à-dire $k = 0$ (ben oui : on a noté que $2k\pi/(2n+1) \in [0, 2\pi[$).

Ainsi, l'équation (E_k) possède une unique solution pour $k \neq 0$ et aucune pour $k = 0$ (le second membre est différent de 0). On vient donc de prouver SANS ARNAQUE le résultat demandé !

$$\boxed{P_n(a) = 0 \text{ si et seulement si il existe } k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \text{ tel que } a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}$$

En fait le résultat resterait vrai si on énonçait $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, mais il faudrait alors distinguer le cas $k = 0$ dans la suite.

6. Comme vu précédemment, l'équation (E_k) possède une unique solution, qu'on simplifie par passage à l'angle moitié :

$$i \frac{e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1}{e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1} = i \frac{e^{ik\pi/(2n+1)} (e^{ik\pi/(2n+1)} + e^{-ik\pi/(2n+1)})}{e^{ik\pi/(2n+1)} (e^{ik\pi/(2n+1)} - e^{-ik\pi/(2n+1)})} = i \frac{2 \cos(k\pi/(2n+1))}{2i \sin(k\pi/(2n+1))}$$

(on a noté que le dénominateur ne s'annule pas puisque c'est le sinus d'un angle de $]0, \pi[$ qui n'est pas $\pi/2$, et il en va de même pour le numérateur). On voit alors apparaître l'inverse d'une tangente, ce qui est bien un réel.

On note aussi qu'il s'agit de tangentes de $2n$ angles distincts de $]0, \pi[$, donc ces tangentes sont (non nulles et) distinctes par injectivité de la fonction tangente sur cet intervalle. On a donc exhibé $2n$ racines réelles distinctes pour ce polynôme de degré $2n$, donc en plus d'avoir toutes les racines (c'était acquis par la résolution), on sait que ces racines sont simples.

$$\boxed{P_n \text{ possède } 2n \text{ racines distinctes qui sont les réels } x_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \text{ pour } 1 \leq k \leq 2n.}$$

7. On va formaliser ici le calcul initié aux questions 1 et 4. On note tout d'abord que dans le binôme de Newton on peut choisir quel terme est mis à la puissance k et quel autre à la puissance $n-k$ (enfin ici : $2n+1-k$), et on va privilégier la puissance simple sur le terme contenant (-1) , ce qui va faciliter les choses une fois les deux sommes réunies, puisque $1 - (-1)^k$ vaut 0 si k est pair, et 2 sinon. Ensuite, il s'agira de décrire les entiers impairs entre 0 et $2n+1$: ils s'écrivent $2j+1$,

avec j décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note enfin que $i^{2j+1} = i(-1)^j$.
Wala, c'est parti :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \underbrace{(1 - (-1))^k}_{=0 \text{ si } k \text{ est pair}} X^{2n+1-k} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} i^{2j+1} 2X^{2n+1-(2j+1)} = \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j X^{2(n-j)} \end{aligned}$$

Il semble alors raisonnable de définir $Q_n = \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} (-1)^j X^{n-j}$, de sorte que : $P_n = Q_n(X^2)$.

Pour l'unicité, on suppose (comme toujours dans ce genre de circonstances) qu'il existe deux solutions Q_n et R_n . On a alors les **polynômes** $Q_n(X^2)$ et $R_n(X^2)$ qui sont égaux. En considérant (comme toujours) la différence $\Delta = Q_n - R_n$, on obtient alors $\Delta(X^2) = 0$ (on parle encore de polynômes). Au choix, on peut alors écrire Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ ou bien noter que le polynôme Δ possède une infinité de racines (tous les réels positifs). D'une façon ou d'une autre, on obtient la nullité de Δ , et l'unicité de la réponse au problème posé.

Il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n = Q_n(X^2)$

Pour la suite, on peut noter que Q_n est de degré exactement n ; ses premiers termes sont plus précisément ($j = 0$ et $j = 1..$) :

$$Q_n = (2n+1)X^n - \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}X^{n-1} + \dots$$

8. $Q_1 = 3X - 1$ possède $1/3$ comme (unique) racine, et $Q_2 = 5X^2 - 10X + 1$ (reprendre la première question du sujet !) en possède deux, qui sont $1 \pm 2/\sqrt{5}$.
9. Déjà, Q_n est de degré n donc possède au plus n racines distinctes. Par ailleurs, $Q_n(t^2) = P_n(t)$ pour tout réel t , donc : si t est racine de P_n , alors t^2 est racine de Q_n (cette phrase, essentielle, doit être bien comprise). Les $2n$ racines de P_n nous fournissent donc... combien de racines pour Q_n ? En fait, puisque $\tan(\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ et $\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{k\pi}{2n+1}$, les $2n$ racines de P_n vérifient :

$$0 < x_1 = -x_{2n} < x_2 = -x_{2n-2} < \dots < x_n = -x_{n+1}$$

de sorte que $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ sont n réels distincts qui sont racines de Q_n : le compte est bon !

Q_n possède n racines distinctes, qui sont les $\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ pour k décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$

Attention : on n'a pas résolu directement $Q_n(t^2) = 0$: on a trouvé n racines distinctes, et on a pu affirmer qu'il n'y en avait pas d'autres.

10. On sait ou en retrouve que les racines (comptées avec multiplicité) de $p_n X^n + p_{n-1} X^{n-1} + \dots + p_0$ ont leur somme qui vaut $-\frac{p_{n-1}}{p_n}$ (rappel : la preuve consiste à appliquer le principe du poulpe après factorisation). Grâce à la question précédente et à la remarque à la fin de la question 7 on obtient le résultat souhaité :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

2.2 Calcul de $\zeta(2)$

- On définit pour $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, et par définition la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est équivalente à la convergence de la suite (S_n) . Or :

- d'une part (S_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} > S_n$;
- d'autre part la majoration $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$ (qu'on voit sur un dessin fait sur la copie bien entendu, et qu'on prouve par intégration d'une inégalité) sommée pour k allant de 2 à n permet (après ajout du terme manquant et Chaslisation) de prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ainsi, (S_n) est croissante et majorée (par la *constante* 2) donc converge, ce qui par définition nous assure que :

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

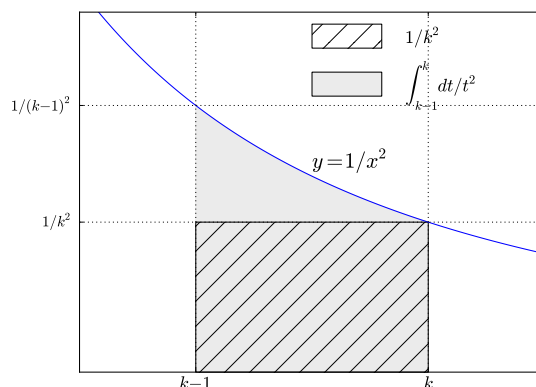


FIGURE 1 – Toujours le même dessin, qu'il faut *vraiment* comprendre.

- Normalement, vous connaissez suffisamment bien les fonctions tangente et sinus pour avoir leur allure au voisinage de 0, avec en particulier leurs positions relatives par rapport à leur tangente en l'origine, qui est la droite d'équation $y = x$: ces positions relatives nous disent exactement les inégalités qu'on nous demande de prouver :

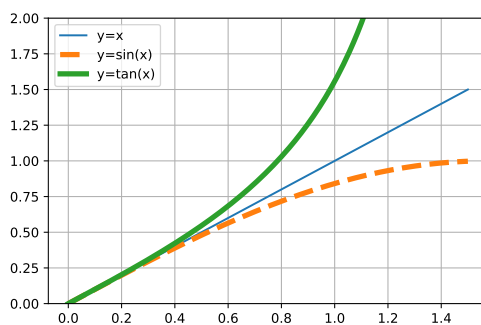


FIGURE 2 – À connaître mieux que $\tan(a - b)$.

Sérieusement si ce dessin vous laisse perplexe, alors par pitié oubliez 15 des 20 formules trigonométriques durement apprises, et observez puis retenez ce dessin.

L'inégalité $0 \leq \sin x$ est une propriété peu nouvelle de la fonction $\sin$ sur $[0, \pi/2]$. Les deux autres inégalités sont essentiellement issues d'une notion hors programme : la convexité. « la courbe est tournée vers le haut/le bas » ou encore « elle est située dessous/dessus ses tangentes ». Mais bon, ces notions n'étant pas au programme, on peut montrer les deux inégalités par étude de fonctions. Par exemple pour la dernière on considère l'application $\delta : x \mapsto \tan x - x$. Cette fonction est de classe C^1 sur $[0, \pi/2[$ et sa dérivée $\delta'(x) = \tan^2 x$ est à valeurs positives, donc δ est croissante, donc $\delta(x) \geq \delta(0) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi/2[$.

Même chose concernant le sinus.

$$\text{Pour tout } x \in [0, \pi/2[, \text{ on a } 0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x.$$

Un tableau de variation de δ est le bienvenu, mais pitié, je ne veux plus de « d'après le tableau de variation » : il s'agit bien d'un argument de CROISSANCE puis de comparaison de $\delta(x)$ à $\delta(0)$. Si vous trouvez ça évident, ça ne vous coûte pas grand chose de l'écrire. Et si vous n'aviez pas réalisé qu'il y avait un vrai argument de maths, alors il n'est pas trop tard pour cesser de pipeauter ! Dans les deux cas, écrivez l'argument.

3. Pour $x \in]0, \pi/2[$, on dispose de trois termes **strictement** positifs qu'on a ordonné : leurs inverses sont ordonnés également ; et comme il s'agit de réels positifs, ces inégalités passent au carré (bien entendu vous savez bien qu'en général pour deux réels a et b tels que $a < b$, on n'a pas forcément $a^2 < b^2$. Bien entendu...).

$$\text{Pour tout } x \in]0, \pi/2[, \text{ on a } 0 < \frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pour aller plus loin on applique, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'encadrement précédent à $x = \frac{k\pi}{2n+1}$ (qui est bien un réel strictement compris entre 0 et $\frac{(n+1/2)\pi}{2n+1} = \pi/2$) :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}.$$

On note ensuite que pour $\theta \in]0, \pi/2[$ on a $\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1$, et ainsi :

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} (S_n + n)$$

4. La première partie du sujet a permis d'établir que $S_n \sim \frac{2n^2}{3}$, donc dans l'encadrement précédent, les deux termes extrêmes (sont équivalents à puis) convergent l'un et l'autre vers $\frac{2\pi^2}{3 \times 4} = \frac{\pi^2}{6}$. Le théorème des gendarmes s'applique et nous assure que le terme central converge vers cette même valeur lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

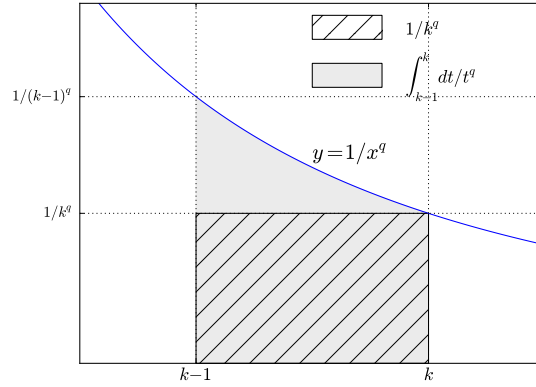
Le théorème des gendarmes nous donne la convergence. Puisqu'elle était acquise avant, on aurait pu se contenter de passer des inégalités à la limite.

3 Une accélération de convergence (Centrale PC 2009)

1. (a) On note bien entendu qu'il est ici question du reste d'une série de Riemann convergente, puisque $q \geq 2$. Pour travailler comme demandé sur un segment, on commence par fixer $M > N$.

Soit $k \in \llbracket N+1, M \rrbracket$. On a pour tout $t \in [k-1, k]$: $\frac{1}{k^q} \leq \frac{1}{t^q}$. En intégrant cette inégalité entre

fonctions continues sur le segment $[k-1, k]$, on obtient : $\frac{1}{k^q} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^q}$.



En sommant ces inégalités pour k décrivant $\llbracket N+1, M \rrbracket$, on obtient :

$$\sum_{k=N+1}^M \frac{1}{k^q} \leq \int_N^M \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{N^{q-1}} - \frac{1}{M^{q-1}} \right).$$

Lorsque M tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $R(N, q)$ alors que celui de droite tend vers $\frac{1}{(q-1)N^{q-1}}$. On peut alors passer l'inégalité précédente à la limite², on obtient :

$$R(N, q) \leq \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}.$$

(b) Pour avoir $R(N, 3) \leq \varepsilon$, il **SUFFIT**³ d'avoir $\frac{1}{2N^2} \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $N \geq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, donc ici :

Il suffit de prendre $N = 100$.

2. (a) On a par exemple⁴ : $u(n, p) \sim \frac{1}{n^{p+1}}$, donc par comparaison à une série convergente (de Riemann, avec ici $p+1 > 1$) *positive* :

$$\sum_{n \geq 1} u(n, p) \text{ est convergente.}$$

(b) On calcule $\sigma(1)$ par télescopes sur les sommes partielles. Soit donc $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^N u(k, 1) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Le membre de droite tend vers 1 et celui de gauche vers la somme de la série. Par unicité de la limite :

$$\sigma(1) = 1.$$

(c) Une délicate mise au dénominateur commun nous donne directement :

$$u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)(n+p)} = \frac{(n+p) - n}{n(n+1)\dots(n+p)},$$

soit encore :

$$u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = pu(n, p).$$

(d) La relation précédente nous invite à écrire, pour $p \geq 2$ et N entier supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned} p \sum_{n=1}^N u(n, p) &= \sum_{n=1}^N (u(n, p-1) - u(n+1, p-1)) = u(1, p-1) - u(N+1, p-1) \\ &= \frac{1}{p!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\dots(N+p)}. \end{aligned}$$

2. Bien vérifier les convergences *avant* de passer l'inégalité à la limite, merci...

3. Radar automatique : les yeux du correcteur vont immédiatement aller voir ce que vous aurez écrit ici...

4. Penser au fait que p est fixé ; prendre $p = 3$ si ça peut aider.

Le membre de droite tend vers $\frac{1}{p!}$ lorsque N tend vers $+\infty$, alors que celui de gauche tend vers $p.\sigma(p)$. Ainsi :

$$\sigma(p) = \frac{1}{p.p!}.$$

3. (a) Au rang 2, la relation demandée⁵ est :

$$\frac{1}{x^3} = \frac{b_2x + c_2}{x^3(x+1)(x+2)} + \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)},$$

c'est-à-dire :

$$(x+1)(x+2) = a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Pour que cette relation soit vérifiée pour tout $x > 0$, il SUFFIT⁶ donc de prendre $a_2 = 1$, $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$.

Supposons maintenant avoir trouvé, à $p \geq 2$ fixé, les a_k , b_k et c_k pour $k \leq p$, tels que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x^3} = \frac{b_px + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)} + \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)}.$$

On cherche à avoir, pour tout $x > 0$:

$$\frac{b_px + c_p}{x^3(x+1)\dots(x+p)} = \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\dots(x+p)(x+p+1)} + \frac{a_{p+1}}{x(x+1)\dots(x+p+1)},$$

soit encore

$$\forall x > 0, \quad (b_px + c_p)(x+p+1) = a_{p+1}x^2 + b_{p+1}x + c_{p+1}.$$

Il suffit pour cela de définir $a_{p+1} = b_p$, $b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p$ et enfin $c_{p+1} = (p+1)c_p$.

L'existence des suites $(a_p)_{p \geq 2}$, $(b_p)_{p \geq 2}$ et $(c_p)_{p \geq 2}$ est établie, avec $\begin{cases} a_{p+1} = b_p \\ b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p \\ c_{p+1} = (p+1)c_p \end{cases}$

Une rédaction soigneuse de la récurrence n'est ici pas si simple qu'il n'y paraît. En particulier, la proposition « Il existe a_p, b_p, c_p tels que... » n'a pas de sens (qui sont $a_2, \dots, a_{p-1}$?), et « Il existe des coefficients a_k ($k \leq p$), b_p et c_p tels que... » se prouve effectivement par récurrence, mais ceci n'établit pas exactement le résultat demandé (les a_k de cette récurrence dépendent a priori de p , alors qu'ils ne doivent pas. C'est subtil, mais c'est ainsi).

Il y a alors deux façons de s'en sortir. La première (usuelle) consiste à rédiger comme plus haut la « construction par récurrence » : on donne les premiers termes, puis on raconte comment passer d'une étape à la suivante. La question de l'unicité (implicite quand on demande des formules comme c'est ici le cas) est alors pudiquement laissée sous le tapis.

La deuxième consiste à énoncer soigneusement la propriété, puis réparer ce qui coince. Ici, on prouverait pour tout $p \geq 2$ la propriété « Il existe des coefficients $a_k^{(p)}$ ($k \leq p$), b_p et c_p tels que... ». Ensuite, on prouve l'unicité de ces coefficients (à p fixé, et PAS par récurrence !). Enfin, l'unicité et les valeurs suffisantes trouvées dans la récurrence nous assurent que les $a_k^{(p)}$ ne dépendent en fait pas de p : c'est gagné !

- (b) On montrerait par récurrence immédiate (valeur de c_2 et relation de récurrence) que pour tout $p \geq 2$, $c_p = p!$ Puisque $b_2 \geq c_2$ et $b_{p+1} \geq (p+1)b_p$, la proposition « $b_p \geq p!$ » se prouve alors par récurrence à nouveau immédiate.

Pour tout $p \geq 2$, $b_p \geq c_p \geq 0$.

(c) D'après les questions précédentes, il suffit d'écrire :

5. Attention, on ne SUPPOSE surtout pas cette relation vérifiée, sans quoi c'est fichu, pour la prouver !

6. Et ceux qui auront prétendu (plus ou moins implicitement, par exemple via un « donc $b_{p+1} = \dots$ ») qu'il FAUT prendre de telles valeurs, auront probablement soigneusement justifié cette affirmation *inutile*, avant de passer à la question qui était posée, à savoir l'existence...

```
def abc(p):
    if p == 2:
        return 1, 3, 2
    a, b, c = abc(p-1)
    return b, c+p*b, p*c # attention à p vs. p+1 !
```

(d) Demandons à Python

```
>>> for i in range(2, 5):
...     print abc(i)
...
(1, 3, 2)
(3, 11, 6)
(11, 50, 24)
```

Les premières valeurs de (a_p, b_p, c_p) ... sont écrites juste en dessus !

(e) On a déjà vu : $c_p = p!$ La relation de récurrence pour les b_p , finement divisée par $(p+1)!$ fournit alors : $\frac{b_{p+1}}{(p+1)!} = \frac{b_p}{p!} + \frac{1}{p+1}$, et donc : $\frac{b_p}{p!} = \frac{b_2}{2!} + \sum_{k=3}^p \frac{1}{k}$, soit encore (puisque $\frac{b_2}{2!} = \frac{3}{2} = 1+1/2$) : $b_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$, et on reconnaît les sommes partielles de la série harmonique, dont un équivalent simple a déjà été rencontré une ou deux fois.

Pour $p \geq 2$, $c_p = p!$ et $b_p = p! \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \sim p! \ln(p)$.

4. (a) La minoration brutale $(n+1) \dots (n+4) \geq n^4$ fournit $\frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \leq \frac{50}{n^6} + \frac{24}{n^7}$. Les trois termes de la relation précédentes sont les termes généraux de séries convergentes, ce qui autorise à passer cette inégalité aux restes (on somme de N à M , puis on passe l'inégalité à la limite en M) :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} \leq 50R(N, 6) + 24R(N, 5) \leq \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6} \leq \frac{14}{N^5}.$$

Recollons maintenant les morceaux. Dans la relation

$$\frac{1}{n^3} = \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} + \sum_{k=2}^4 \frac{a_k}{n(n+1) \dots (n+4)},$$

on ne trouve que des termes de séries convergentes, de sorte que les sommes des séries associées sont égales, avec :

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1) \dots (n+4)} + \sum_{k=2}^4 a_k \sigma(k).$$

On a alors

$$\left| \zeta(3) - \left(\sigma(2) + 3\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^N \frac{50k+24}{k^3(k+1) \dots (k+4)} \right) \right| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1) \dots (k+4)}.$$

Pour avoir l'approximation souhaitée, il suffit donc de majorer le membre de droite par ε , ce qui sera vérifié dès que $\frac{14}{N^5} \leq \varepsilon$. Il suffit donc de prendre $N \geq \left(\frac{14}{5} 10^5 \right)^{1/5} \simeq 12, 29$.

$$\left| \zeta(3) - \left(\sigma(2) + 3\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^{13} \frac{50k+24}{k^3(k+1) \dots (k+4)} \right) \right| \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

(b) Yapluca :

```
import fractions as fr
from math import factorial

def sigma(p):
    return fr.Fraction(1, p*factorial(p))

approx = sigma(2) + 3*sigma(3) + 11*sigma(4) + \
    sum(fr.Fraction(50*k+24, k**3*(k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)) \
        for k in range(1, 14))
```

```
>>> approx
Fraction(956266583969985193, 795533836249152000)
>>> float(approx)
1.2020438860007125
```

Pour information, on a l'approximation :

$$\zeta(3) \simeq 1.202056903$$

(au sens : à 10^{-10} près)

Et pour comparer :

```
>>> approx2 = sum(fr.Fraction(1, k**3) for k in range(1, 101))
>>> approx2
Fraction(8147348333074350358307418186167251193151812233617221640689414939133
1289704097519580221863303145356050828007873151451209887,
6778118278309249584865634509184402157173419063091459022933216137995025717082
8098031102950264769178652556660142954086400000)
>>> float(approx2)
1.2020074006596777
```