$\zeta(2)$ vs $\zeta(3)$

Le 13 septembre 2025 – calculatrices autorisées

Ce sujet est très long : ne vous inquiétez pas de n'en faire qu'une partie qui vous semble modeste. Traiter correctement les deux premières parties est suffisant pour avoir 20/20 ! Avancez tranquillement en assurant vos résultats et votre rédaction, en numérotant les copies au fur et à mesure et en encadrant vos résultats.

1 Comme promis : $u_{n+1} = f(u_n)$

On va étudier ici la suite définie par son premier terme $u_0 = 999$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \mathrm{th}(u_n)$ avec $\mathrm{th} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\cdot$

Si nécessaire (!), vous pourrez utiliser le théorème de Cesàro : si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\dfrac{1}{n}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. (a) Rappeler sans justification l'allure du graphe de la fonction th. Donner son développement limité à l'ordre 3 en 0 (petit bonus s'il y a une preuve).

   (b) Donner avec une preuve, le signe de $\mathrm{th}(x) - x$ en fonction de x. Montrer que l'équation $\mathrm{th}(x) = x$ possède exactement une solution.

   (c) Déterminer la limite quand x tend vers 0^+ de $\dfrac{1}{\mathrm{th}(x)} - \dfrac{1}{x}\cdot$

   Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{\mathrm{th}^p(x)} - \dfrac{1}{x^p}$ quand x tend vers 0^+.

2. (a) Étudier soigneusement la suite (u_n) : après l'indispensable dessin/croquis, montrer que (u_n) converge vers une limite qu'on déterminera.

   (b) Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge.

   (c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2 Un calcul classique

Pour $\alpha > 1$, on définit $\zeta(\alpha)$ la somme de la série de Riemann convergente :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\cdot$$

Quelques valeurs de ζ sont connues et assez spéciales (en particulier sur les entiers pairs). On va établir ici la valeur « bien connue » de $\zeta(2)$. La première partie de ce gros exercice est essentiellement algébrique.

2.1 Racines d'un polynôme

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$

1. Calculer P_1 et P_2. Ces polynômes sont-ils irréductibles ?

2. Soit N un entier strictement positif. Donner l'ensemble des complexes vérifiant $z^N = 1$.
On demande d'abord un énoncé clair ; puis une preuve de cet énoncé. Oui, celle du premier DM... sans le moindre symbole mystérieux $\Longrightarrow$ et encore moins $\Longleftrightarrow$ bien entendu.

Dans la suite, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

3. Calculer $P_n(i)$.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
5. Soient $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $P_n(a) = 0$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1, 2n]\!]$ tel que

$$a\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right)$$

6. En déduire que P_n possède exactement $2n$ racines distinctes, et qu'elles sont réelles.
7. À l'aide du binôme de Newton, montrer l'existence de $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n = Q_n(X^2)$.
Question bonus : montrer l'unicité de Q_n.
8. Expliciter Q_1 et Q_2, ainsi que leurs racines.
9. Déterminer les racines de Q_n.
10. Justifier :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

On note S_n cette somme dans la suite du problème.

2.2 Calcul de $\zeta(2)$

1. Avec une preuve succincte mais convaincante, rappeler pourquoi $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.
2. Illustrer graphiquement puis prouver :

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \qquad 0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{x^2}$ pour $x \in]0, \pi/2[$ puis de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ à l'aide de S_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
4. Conclure en donnant la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3 Une accélération de convergence (Centrale PC 2009)

On accélère ici la convergence d'une série, pour calculer $\zeta(3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ à ε près, avec $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

1. (a) Soient $q, N \in \mathbb{N}$, avec $q \geqslant 2$ et $N \geqslant 1$. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale (sur un segment), majorer soigneusement le reste :

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}.$$

   (b) Déterminer un entier N tel que $R(N, 3) \leqslant \varepsilon$.

2. On pose dorénavant, pour $p, n \in \mathbb{N}^*$: $u(n,p) = \dfrac{1}{n(n+1)...(n+p)}$.

   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u(n,p)$ est convergente.

   On note $\sigma(p)$ la somme de la série : $\sigma(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u(n,p)$.

(b) Calculer $\sigma(1)$.

(c) Pour $p \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n,p)$.

(d) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ pour $p \geqslant 2$.

3. (a) Montrer par récurrence l'existence de trois suites $(a_p)_{p\geqslant 2}$, $(b_p)_{p\geqslant 2}$ et $(c_p)_{p\geqslant 2}$ d'entiers naturels telles que pour tout réel x strictement positif et tout entier $p \geqslant 2$ on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)...(x+p)} + \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)...(x+k)}.$$

On explicitera en particulier les valeurs de a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} en fonction de celles de a_p, b_p, c_p et p.

(b) Montrer que pour tout $p \geqslant 2$: $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$.

(c) Donner un programme (une fonction) Python permettant de calculer les a_p, b_p et c_p.

(d) Calculer a_p, b_p et c_p pour $2 \leqslant p \leqslant 4$.

(e) Expliciter, pour $p \geqslant 2$, la valeur de c_p ; puis celle de b_p à l'aide d'une somme. En déduire un équivalent simple de b_p lorsque p tend vers $+\infty$.

4. (a) Donner un majorant simple de

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)...(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède (et d'une calculatrice !), comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ε avec une valeur de N moins grande que celle trouvée question 1b.

(b) En utilisant ce qui précède, donner (à l'aide de la calculatrice) une valeur décimale approchée (par défaut) à ε près.