



Khôlles : quinzaine numéro 1

Du 15 au 26 septembre 2025

Le début de l'année étant consacré à de la réalphabetisation, il n'y a presque rien dans le cours, au moins pour la première semaine. Petits rappels :

- On prendra particulièrement garde à distinguer u_n , (u_n) , $\sum u_n$, $\sum_{n=0}^N u_n$, $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_N$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.
- Pas plus que moi¹ les élèves ne sont censés savoir ce qu'est la série de terme général u_n mais ils doivent savoir qu'elle se note $\sum u_n$, que ce n'est PAS la suite (u_n) , et ce que signifie « $\sum u_n$ converge ». Dans cette classe, les séries ne sont jamais croissantes ou majorées (puisque'on ne sait pas ce que c'est) : elles ont juste le droit d'être convergentes ou divergentes.

1 Première semaine

- Pratique des développements limités.
- Suites réelles : révisions de première année. Khôlleurs, merci de donner une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (allez, avec f croissante...) dans chaque trinôme : $u_{n+1} = \sin u_n$ avec $u_0 \in [0, \pi/2]$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{10} \cdots$
- $u_{n+1} = au_{n+1} + bu_n$.
- Si pour tout n on a $0 < u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Séries de réels : essentiellement des rappels de première année, avec les définitions (convergence, somme partielle, restes), la convergence des séries géométriques et de Riemann.
- (u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

2 Deuxième semaine (en plus)

- Théorèmes de comparaison (à une série convergente à termes positifs).
- Les comparaisons à une intégrale se font toujours à la main, sans théorème particulier, et forcément avec un dessin avec des vrais rectangles significatifs.
- Convergence absolue (qui entraîne la convergence tout court)
- « Règle de d'Alembert » (ne pas en abuser, merci...).
- Séries alternées : convergence et contrôle du reste.
- Produit de Cauchy ; cas de l'absolue convergence.

3 Questions de cours

Pour la première semaine :

- Unicité de la limite.
- Si une suite est convergente, alors elle est bornée.
- Convergence des séries géométriques.
- Convergence des séries de Riemann.
- Si pour tout n on a $0 < u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Pour la deuxième semaine, ajouter :

- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi.

1. Ennemis : c'est ce document que vous pouvez envoyer à l'inspection générale pour briser ma carrière !

- Si $u_n = O(v_n)$ avec $0 \leq v_n$ et $\sum v_n$ convergente, alors $\sum u_n$ converge (absolument).
- Règle de d'Alembert (que je pratique peu mais qui est une bonne question de cours).
- Si une série réelle est absolument convergente, alors elle est convergente.
- Exponentielle d'une somme de complexes.
- Séries alternées : convergence, et contrôle du reste.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : encore des séries, et de l'algèbre linéaire (de première année, essentiellement).