



Algèbre linéaire - rappels et compléments

1 Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1 – Mines 2022 [5/10] - Hugo D.

Soient p, q, r trois projecteurs d'un espace de dimension finie. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur.

1. Montrer que la trace d'un projecteur est un entier.
2. Montrer que $q = r = 0$.

Exercice 2 – À savoir faire les yeux bandés ; CCP 2016 [2/10]

Soit E un espace vectoriel. Déterminer les endomorphismes de E tels que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

On pourra, dans un premier temps, supposer E de dimension finie et travailler dans une base.

Exercice 3 – X 2021 [5/10]

1. Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilisent chaque droite.
2. Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilisent tous les sous-espaces de dimension 5.

Exercice 4 – Mines 2010 (PC) [3/10]

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $2u^3 + 5u^2 - 3u = 0$. Exprimer, pour $n \geq 3$, u^n en fonction de u et u^2 .

Exercice 5 – CCP 2010 (PC) [7/10]

Soient $n \geq 2$, et p un projecteur de $E = \mathbb{R}^n$ de rang $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Calculer la dimension du commutant de p (le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes de E qui commutent avec p).

Exercice 6 – X 2010 (PC) [3/10]

Soient E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ si et seulement si $u \circ u = 0$ et $\dim(E) = 2\text{rg}(u)$.

Exercice 7 – Mines 2015 et 2016 [6/10]

Soient E de dimension finie $n \geq 1$ et $(e_k)_{1 \leq k \leq n} \in E^n$.

1. Montrer que Φ définie par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \Phi(u) = (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

est linéaire.

2. Montrer que $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de E si et seulement si Φ est un isomorphisme.

Exercice 8 – CCP 2017 [6/10]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$, avec $P(0) = 0 \neq P'(0)$.

Démontrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$...

- lorsque E est de dimension finie ;
- et dans le cas général !

Exercice 9 – Mines 2010 (PC), TPE 2016 (PSI) [6/10]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M + (\text{tr} M)A = B$?

Exercice 10 – CCP 2016 [3/10]

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (non nuls).

Déterminer le rang de $M = XY^T$.

Exercice 11 – [4/10]

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f'_1, \dots, f'_n)$ est de rang au moins $n - 1$.

Donner un exemple où ce rang vaut $n - 1$, et un autre où il vaut n .

Exercice 12 – [4/10]

Soient p et q deux projecteurs qui commutent. Montrer : $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

2 Polynômes, fractions rationnelles

Exercice 13 – Mines 2022 [6/10] – Côme L.

Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{cases}$$

Exercice 14 – Mines 2010 (polynômes de Hilbert) [7/10]

On définit $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

- (question que j'ai ajoutée) Exprimer $H_{15}(20)$ à l'aide d'un coefficient binomial. Même chose pour $H_{15}(-10)$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(p) \in \mathbb{Z}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
 - Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $P(p) \in \mathbb{Z}$.
 - Il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \dots + \lambda_n H_n$.

Exercice 15 – ENSAM 2016 [5/10]

Soit $P = X^3 - X^2 - 1$.

- Montrer que P n'admet que des racines simples.
- Montrer que P admet une racine réelle et deux complexes (non réelles) conjuguées

Exercice 16 – Polynômes de Tchebychev [7/10]

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n, U_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$ et $\sin((n+1)\theta) = \sin \theta U_n(\cos \theta)$. Montrer que ces polynômes sont (à n fixé!) uniques.
- Donner les premiers T_n et U_n , ainsi que le terme dominant de T_n et U_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Factoriser T_n et U_n en produit d'irréductibles.

Exercice 17 – Centrale 2013 [6/10]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

- Montrer que Δ est nilpotent.
- En déduire :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0.$$

3 Calcul matriciel

Exercice 18 – Centrale 2022 [2/10] – Édith P.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\text{tr}(A) = 0$ et $M^* = -M$.

On « rappelle » que $M^* = \overline{M^T}$. Bref, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et donner sa dimension.
2. Est-ce un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

Exercice 19 – Mines 2010 (PC) [4/10]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Exercice 20 – Un faux exercice matriciel [7/10]

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer :

$$\text{rg}(AB) + \text{rg}(BC) \leq \text{rg}(B) + \text{rg}(ABC)$$

Indication : on pourra plutôt faire de la géométrie, et s'intéresser à $\text{rg}(u) - \text{rg}(v \circ u) \dots$

Exercice 21 – Un déterminant [5/10]

Calculer le déterminant de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j} = f_{|i-j|}$, où (f_n) est la suite de Fibonacci : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22 – Un déterminant [6/10]

Calculer le déterminant de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j} = (-1)^{\text{Max}(i,j)}$.

4 Quelques calculs effectifs

Exercice 23 – Pivotons... [4/10]

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues (x, y) :

$$\begin{cases} -x + (1 + \lambda)y = -4 - \mu \\ 2x - \lambda y = 9 + \mu \end{cases}$$

3. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ le système suivant possède-t-il une unique solution ?

$$\begin{cases} x + \lambda y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ \lambda x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 24 – Rangs [4/10]

Donner le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 – Inverses [4/10]

Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26 – Réduction du rang [6/10]

Pour chacune des matrices A_i , exhiber P_i et Q_i inversibles telles que $P_i A_i Q_i = J_{r_i}$. On mettra si possible en œuvre la méthode géométrique et la méthode par opérations élémentaires (pour ceux qui connaissent !) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 – Complétons [7/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ représenté par A dans la base canonique de E .

1. Trouver une base du noyau de u ; compléter pour avoir une base de E .
2. Trouver une base de l'image de u ; compléter pour avoir une base de E .

3. Recommencer avec cette fois $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ représentant $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$.

Exercice 28 – Équation d'un hyperplan [4/10]

« Trouver une équation d'un hyperplan » consiste à donner une forme linéaire dont il est le noyau. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $H = \text{Vect}(e_1, e_2)$ (avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique) est le noyau de $(x, y, z) \mapsto x$: « H a pour équation $x = 0$ dans la base canonique ».

1. On suppose que $(f_1, \dots, f_{n-1})$ est une famille libre dont on connaît les coordonnées dans une base $\mathcal{E}$. Expliquer comment obtenir une équation de H dans $\mathcal{E}$ en pivotant sur les colonnes d'une matrice (n, n) bien choisie.
2. Trouver une équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1, 2)$.
3. Trouver une équation du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, 3)$ et $(4, 5, 6)$.

Exercice 29 – Un peu de complexité [4/10]

Évaluer la complexité des différents pivots pour les algorithmes mis en œuvre dans les exercices précédents.

Il s'agit d'évaluer (à la louche) le nombre de sommes/produits effectués dans le cas de matrices (n, n) (on se fiche des constantes : est-ce plutôt du 2^n , n^2 , n^4 , $n!$?)

Exercice 30 – Une matrice jordanisée [4/10]

On s'intéresse à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(il y a des 0 partout ailleurs).

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_7$ n'est pas inversible.
On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ces valeurs.
3. Pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, déterminer $\text{rg}(A - \lambda I_7)$.
4. Pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, déterminer $\text{Ker}(A - \lambda I_7)$, ainsi que $\text{Ker}(A - \lambda I_7)^2$, etc.

5 Posés en colle

Exercice 31 – L. Mermet 2023-2024 [3/10]

Soient A et B deux sev de E , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer :

$$f(A) \subset f(B) \iff A + \text{Ker}(f) \subset B + \text{Ker}(f)$$

Exercice 32 – L. Mermet 2023-2024 [3/10]

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On définit $q = \text{Id}_E - p$, ainsi que :

$$L = \{u \circ p \mid u \in \mathcal{L}(E)\} \quad \text{et} \quad M = \{u \circ q \mid u \in \mathcal{L}(E)\}$$

Montrer que L et M sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 33 – L. Mermet et P. Bel 2023-2024 [8/10]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = -\text{Id}_E$. Attention, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer que si x est non nul, alors $(x, f(x))$ est libre, et que le sous-espace engendré par ces deux vecteurs est stable par f .
3. Montrer qu'il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice de f « est simple ».

Exercice 34 – C. Stérin 2023-2024 [5/10]

Soient p et q deux projecteurs. Montrer :

$$\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q) \iff (p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p)$$

Exercice 35 – P. Bel 2023-2024 [4/10]

Soient E un espace de dimension 6 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f^2) = 3$. Que peut valoir $\text{rg}(f)$?

Exercice 36 – P. Bel 2023-2024 [6/10]

Soient K et I deux sous-espaces vectoriels de respectivement E et F . Montrer que

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E, F) ; K \subset \text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \subset I\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$, et déterminer sa dimension.

Exercice 37 – B. Saleur 2023-2024 [3/10]

Linéarité, noyau et image de $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'' + P' + P$.

Exercice 38 – B. Saleur 2023-2024 [1/10]

En dimension finie, montrer que pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on a : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ si et seulement si $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Exercice 39 – B. Saleur 2023-2024 [4/10]

Avec u et v comme on imagine, montrer : $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(v \circ u)$.

Exercice 40 – L. Mermet 2023/2024 [2/10]

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto f - g$ est linéaire de $F \times G$ dans E .
2. Déterminer son image et son noyau.
3. En déduire le théorème de Grassmann sur $\dim(F + G)$.

6 Des indications (et même un peu mieux)

Exercice 1 – Dans une base adaptée : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p) \in \mathbb{N}$. Ensuite, en notant $p_1, q_1, r_1, s_1 \in \mathbb{N}$ les rangs des quatre projecteurs en jeu ($s = p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$), on a par linéarité de la trace puis mise au carré : $(s_1 - p_1 - q_1\sqrt{2})^2 = 3s_1$. En développant : si q_1 était non nul alors $\sqrt{2}$ serait rationnel, ce que vous savez prouver faux ! On en déduit de façon symétrique que $r_1 = 0$ (au fait, vous savez montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel ?)

Exercice 2 – Il s'agit évidemment de montrer que les endomorphismes ayant cette propriété sont exactement les homothéties. Dans un sens, c'est trivial. Réciproquement, on suppose la propriété vérifiée, et en dimension finie, on peut regarder la matrice de u dans une base. Elle est d'abord diagonale (regarder $u(e_1)$), puis scalaire (regarder $u(e_1 + e_2)$). En dimension infinie, on a tout d'abord pour tout $x \neq 0$ l'existence de $\lambda(x)$ tel que $u(x) = \lambda(x)x$. Pour montrer que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x , on fixe x et y distincts, et on observe $u(x + y)$. Il y aura lieu de distinguer selon que (x, y) est libre ou non.

Exercice 3 – Si u stabilise chaque droite, alors pour tout vecteur x la famille $(x, u(x))$ est liée, n'est-elle pas ? Ensuite, chaque droite de $\mathbb{R}^{10}$ peut être vu comme l'intersection de deux sous-espaces de dimension 5... donc est stable par un endomorphisme qui stabiliserait chacun de ces sous-espaces ! Bref dans les deux cas il n'y a que les homothéties.

Exercice 4 – Reste dans la division euclidienne de X^n par $2X^3 + 5X^2 - 3X = X(X + 3)(2X - 1)$...

Exercice 5 – Parions pour $r^2 + (n-r)^2$. Matriciellement, ou géométriquement : $p \circ u = u \circ p$ si et seulement si l'image et le noyau de p sont stables par u .

Exercice 6 – Déjà, $u \circ u = 0$ est équivalent à : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. Il n'y a plus grand chose à faire...

Exercice 7 – Injectivité et dimensions.

Exercice 8 – Il y a évidemment un argument dimensionnel qui facilite les choses... mais dont on peut se passer via une analyse-synthèse dans le cas de la dimension infinie.

Exercice 9 – Considérer $\Phi : M \mapsto M + (\text{tr} M)A$. Quelqu'un dans son noyau est forcément de la forme λA ; mais $\Phi(A) = (1 + \text{tr}(A))A$, donc si $\text{tr}(A) \neq -1$, alors Φ est bijective. Sinon, le noyau est une droite, donc l'image est un hyperplan, et la condition nécessaire d'existence $\text{tr}(B) = 0$ donne une inclusion de l'image dans un hyperplan donc l'égalité...

Exercice 10 – Toutes les colonnes sont colinéaires, et il y en a au moins une non nulle, donc le rang vaut 1.

Exercice 11 – Théorème du rang pour $f \mapsto f'$ sur l'espace engendré par les f_i .

Exercice 12 – Une inclusion est claire. Pour l'autre, on fixe un vecteur où on pense, et on lui applique p ou q en agitant les termes et les bras.

Exercice 13 – On ne travaille évidemment pas par équivalence. Dans l'analyse, je serais tenté de considérer le polynôme $(X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - sX^2 + tX - p$ avec $s = x+y+z = 1$, $t = xy+xz+yz$ qui se calcule en considérant s^2 (et on obtient $s = -10$) puis en multipliant la troisième équation du système par xyz on trouve $p = t = -10$, donc $(X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - X^2 - 10X + 10 = (X-1)(X^2 - 10) = (X-1)(X-\sqrt{10})(X+\sqrt{10})$, ce qui impose (à l'ordre près) x, y et z .

La synthèse ne pose guère de problème.

Exercice 14 – Distinguer trois cas : $0 \leq p < n$, $p < 0$ et $p \geq n$. Pour montrer que les λ_i sont entiers, évaluer en 0, puis 1...

Exercice 15 – Utiliser la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées (s'il y avait une racine double, elle serait racine de la dérivée, donc vaudrait... etc). Accessoirement, la définition précise ET la caractérisation ont été demandées. Une étude de fonction permet de conclure.

Exercice 16 – Unicité à faire soigneusement (les $\cos \theta$ décrivent une infinité de valeurs, fournissant une infinité de racines à la différence de deux candidats solution). Pour l'existence : récurrence double, ou bien récurrence simple en traitant en parallèle les T_n et U_n , ou encore calcul direct via $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

Exercice 17 – Si $P \neq 0$, alors $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$ (on peut aussi regarder la matrice de Δ dans la base canonique). Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $\Delta^n(P) = 0$; on écrit alors $\Delta = (\Delta + \text{Id}) - \text{Id}$ et on binômise... dans $\mathcal{L}(E)$ entre endomorphismes qui commutent.

Exercice 18 – Alors... il s'agit des matrices de la forme $\begin{pmatrix} wi & x+yi \\ -x+yi & zi \end{pmatrix}$ avec $w, x, y, z \in \mathbb{R}$; on est donc face à un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4; plus précisément il possède pour base

$$(iE_{1,1}, E_{1,2} - E_{2,1}, iE_{1,2} + iE_{2,1}, iE_{2,2})$$

Il ne s'agit par contre pas d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel puisque $A = iE_{1,1}$ appartient à $\mathcal{A}$ mais pas iA .

Exercice 19 – Le carré d'une matrice de rang 1 est connu...

Exercice 20 – Le théorème du rang appliqué à la restriction de v à $\text{Im}(u)$ nous dit : $\text{rg}(u) = \text{rg}(v \circ u) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(v))$. Appliquons cela à $u = b$ et $v = a$, puis $u = b \circ c$ et $v = a...$

Exercice 21 – Il me semble que l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} - L_{n-2}$ conduit à une relation assez simple...

Exercice 22 – on écrit évidemment la tête de M , et on se dit que les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pourraient être intéressantes... mais pas dans n'importe quel ordre! Je trouve $(-1)^{n(n+3)/2} 2^{n-1}$.

Exercice 23 – Le premier est de Cramer : $\mathcal{S}_1 = \{(1, -1, 2, -2)\}$. Pour le deuxième, il faut discuter. Les solutions du troisième constituent un plan : $\mathcal{S}_3 = \left\{ \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z - t, -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}z, z, t \right) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$. Enfin, les λ fournissant une unique solution au troisième système sont les racines de $\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0$.

Exercice 24 – 3, 2, 1, 3, 3, et pour la dernière, il faut discuter.

Exercice 25 – Les inverses respectives sont :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière n'est pas inversible!

Exercice 26 – Attention, il n’y a pas unicité !

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}, Q_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & -1/4 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 5/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme A_1 est inversible, on aurait pu prendre $P_1 = A_1^{-1}$ et $Q_1 = R_1 = I_2 \dots$

On aura noté que si on pivote de façon ordonnée, sans bricolage, alors on obtient « souvent » des matrices triangulaires. Si ce n’est pas le cas, c’est parce qu’on a dû échanger deux lignes pour avoir un pivot...

Exercice 27 – En pivotant sur les colonnes, on voit que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une base de $\text{Im}(u)$, qu’on peut compléter avec e_4 pour faire une base. De même, $\mathcal{F} = (v(e_1), v(e_2), v(e_4))$ constitue une base de $\text{Im}(v)$ (le pivot nous dit que $v(e_3) \in \text{Vect}(v(e_1), v(e_2))$), et on peut compléter $\mathcal{F}$ avec (f_3, f_5) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$ (on a alors une famille échelonnée).

Exercice 28 – On construit $M = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_{n-1}, v)$, avec $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et on pivote sur les

colonnes de M jusqu’à obtenir une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & & 0 \\ (*) & & & \varphi(x_1, \dots, x_n) & \end{pmatrix}$ qui a le même

rang que M . Or $v \in H$ si et seulement si M est de rang $n-1$: une équation de H dans $\mathcal{E}$ est donc : $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Applications : $y - 2x = 0$, et $x + 2y - z = 0$ (d’un point de vue euclidien c’est très clair d’ailleurs, n’est-il pas ?)

Exercice 29 – Quand on résout un système (n, n) , il y a la mise sous forme triangulaire, constituée de n étapes. Pour chacune, on réalise n opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ (ainsi éventuellement qu’un échange de ligne en cas de pivot défaillant). Il y a de l’ordre de n opérations élémentaires par opération sur une ligne, soit finalement un coût de l’ordre de n^3 additions/multiplications dans $\mathbb{K}$ pour mettre sous forme triangulaire. La dernière phase est elle d’un coût quadratique. En gros, tous les autres algorithmes à base de pivot ont un coût cubique !

Exercice 30 – A est inversible ; son spectre vaut $\{2, 3, -1\}$.

Exercice 31 – Je dirais bien : par double implication ? Encéphalogramme presque plat.

Exercice 32 – $u = u \circ \text{Id} = u \circ p + u \circ q$.

Exercice 33 – Le résultat serait faux sur $\mathbb{C}$. Si on prenait le déterminant ? Il existe un sous-espace F_1 de dimension 2 stable par f tel que la matrice de la restriction de f à ce sous-espace vaut $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si ce sous-espace n’est pas tout E , on prend x en dehors, et on montre que le sous-espace engendré par x et $f(x)$ s’intersecte trivialement avec F_1 . Le sous-espace de dimension 4 auquel on pense est alors stable par f , et la matrice de f dans la base à laquelle on pense est ce qu’on constate. Si ce sous-espace est E c’est fini. Sinon « on itère ». Pour rédiger de façon inattaquable, on considère le plus grand sous-espace (au sens de la dimension) stable par f possédant une base dans laquelle la matrice de (la restriction de) f est diagonale par blocs (avec des blocs de B , donc...). Si ce plus grand sous-espace G n’est pas E , on prend $x \in E \setminus G$ et on montre que $G \cap \text{Vect}(x, u(x)) = \{0\}$ et deux lignes plus loin on a une contradiction.

Exercice 34 – Pour le sens direct : si $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q)$ alors p et $p \circ q$ coïncident que les sous-espaces supplémentaires $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$ donc sont égaux (même chose pour $q = q \circ p$).

Réciproquement, si $p = p \circ q$ et $g = g \circ p$ alors $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(q)$.

Exercice 35 – L'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ permet d'exclure $\text{rg}(f) < 3$, et $\text{rg}(f) = 6$ donnerait f bijective donc f^2 aussi. En raisonnant matriciellement, on trouve facilement un cas pour lequel $\text{rg}(f) = 3$ ($\text{Diag}(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ fait le job) ainsi que $\text{rg}(f) = 4$ (prendre une nilpotente avec quatre 1 sur la diagonale) puis $\text{rg}(f) = 5$ (la même que précédemment, et un 1 en bas à droite).

Exercice 36 – En prenant E_1 (resp. F_1) un supplémentaire de K (resp. I), on établit un isomorphisme assez naturel entre A et $\mathcal{L}(E_1, F_1)$.

Si on préfère les bases, on complète une base de K (resp. I) en une base $\mathcal{E}$ de E (resp. $\mathcal{F}$ de F). L'automorphisme $u \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \text{Mat}(u, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ met alors en bijection A et les matrices « comme on le voit avec le théorème 1-2-3-4-5 », espace dont on peut expliciter une base simple.

Exercice 37 – Φ préserve le degré, donc est injective. Pour la surjectivité, regarder l'image de la base canonique (qui est échelonnée), ou la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 38 – Deux implications ; inclusions immédiates ; théorème du rang pour u et pour u^2 .

Exercice 39 – Théorème du rang appliqué à la restriction de v à $\text{Im}(u)$ as usual.

Exercice 40 – L'image est $F + G$ et le noyau est isomorphe à $F \cap G$...

