



1 Un calcul de somme

1. Tout d'abord, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ est notoirement convergente ($3 > 1$), donc par comparaisons de séries à termes positifs :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ est convergente.}$$

2. On décompose d'abord en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dots = \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}.$$

Vous ne savez pas faire ? alors il va falloir apprendre vite ! On écrit la forme fournie par le théorème de décomposition :

$$F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2},$$

puis on évalue XF en 0 pour trouver d'une part a et d'autre part $\frac{1}{2}$; etc.

Ensuite, pour $N \geq 1$, cela va collisionner :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right), \end{aligned}$$

et on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

2 Des approximations de π (d'après CCP TSI 2015)

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, $-t^2 \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)}$$

ou encore :

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{(t^2)^{n+1}}{1+t^2}.$$

Cette relation étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut l'intégrer entre 0 et un réel x fixé (les fonctions en jeu sont bien continues...) pour obtenir... TADAM : le résultat demandé !

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

2. Soit $x \in [0, 1]$. Pour $t \in [0, x]$, on a d'une part $0 \leq t^{2n+2} \leq x^{2n+2}$ et d'autre part $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc (on aura noté le soin pris pour avec les signes...) : $0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq x^{2n+2}$. En intégrant cette inégalité (entre fonctions continues...) sur $[0, x]$ (et on a noté que $0 \leq x$, donc l'intégrale « est dans le bon sens ») :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et le théorème d'encadrement/des gendarmes permet de conclure.

Pour tout $x \in [0, 1]$, $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. En reprenant pour $x = 1$ la relation établie dans la première question, on voit que d'une part la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ **est convergente** (ce qu'on aurait pu établir via le théorème spécial sur les séries alternées) et que d'autre part sa somme vaut $\text{Arctan}(1)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta_n = \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right|.$$

Si on utilise le contrôle du reste des séries alternées dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\delta_n| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Mais on peut aussi choisir de reprendre la relation de la première question et la majoration de la deuxième, qui donne pour $x = 1$:

$$|\delta_n| = \left| \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{1}{2n+3},$$

c'est-à-dire la même inégalité ! Puisqu'on veut $|4\delta_n| \leq \frac{1}{10^7}$, il SUFFIT d'avoir $2n+3 \geq 4.10^7$, et pour cela il SUFFIT de prendre $n = 2 \times 10^7$.

En prenant $N_1 = 20\,000\,000$, on a $\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^{N_1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{10^7}$.

5. On applique bien entendu les deux premières questions à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (dont l'arctangente vaut $\frac{\pi}{6}$ pour obtenir (après nettoyage) :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}.$$

6. On obtient cette fois (majoration du reste d'une série alternée dont le terme général gnagna... ou utilisation de l'expression intégrale du reste) pour $n \geq 1$:

$$\left| \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)\sqrt{3}3^{n+1}} \leq \frac{1}{6 \times 3^n}.$$

Oui, j'ai grossièrement minoré au dénominateur $2n+3$ par 2 et $\sqrt{3}$ par 1 : on ne perd pas grand chose en précision (le 3^n écrasant tout sur son passage) et on gagne beaucoup en simplicité de majorant.

Pour que (six fois) cette différence soit majorée par 10^{-7} , il suffit que $3^n \geq 10^7$, c'est-à-dire $n \geq 7 \frac{\ln 10}{\ln 3} \simeq 14,7$

En prenant $N_2 = 15$ on a $\left| \pi - 6 \sum_{k=0}^{N_2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k \sqrt{3}} \right| \leq \frac{1}{10^7}$.

Et bien entendu :

$$N_2 = 15 \text{ est un peu plus petit que } N_1 = 20\,000\,000\dots$$

7. Vous connaissez ma calculatrice...

```
def somme1(n):
    return sum((-1)**k/(2*k+1) for k in range(n+1))

def somme2(n):
    return 1/sqrt(3)*sum((-1)**k/(3**k*(2*k+1)) for k in range(n+1))

N2 = int(7*log(10) / log(3)) + 1

>>> 4*somme1(10**3), 4*somme1(2*10**7)
(3.1425916543395442, 3.141592703589858) # après un lonnnnnng calcul
>>> 6*somme2(15), pi
(3.141592651733998, 3.141592653589793) # instantané
```

3 Nilpotents d'indice 2 en dimension 3

1. (a) Le rang de u est celui de sa matrice le représentant dans n'importe quelle base... et celle dans $\mathcal{F}$ a clairement comme rang 1 (exactement une colonne non nulle)

$$\text{rg}(u) = 1$$

- (b) L'image de u est de dimension 1 et contient $u(f_3) = f_1$. De même, le noyau de u a pour dimension (théorème du rang) $3 - 1 = 2$ et contient f_1 et f_2 (d'après les deux premières colonnes de la matrice). Comme (f_1, f_2) est libre :

$$\text{Ker}(u) \text{ et } \text{Im}(u) \text{ possèdent comme bases respectives } (f_1, f_2) \text{ et } (f_1).$$

Et on note que l'image est incluse dans le noyau.

- (c) On respecte des informations collectées précédemment :

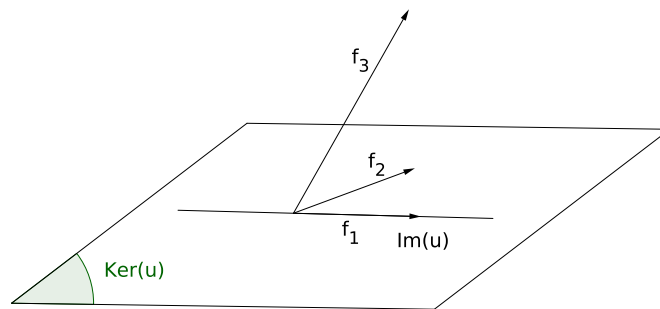


FIGURE 1 – La géométrie du problème

2. (a) D'une manière générale, $g \circ f = 0$ est équivalent à $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$, ce qui donne le résultat ici avec $f = g = v$.

$$\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(v).$$

Pour les sceptiques, montrons l'implication utilisée dans le résultat cité plus haut en supposant $g \circ f = 0$: tout habitant y de $\text{Im}(f)$ s'écrit $f(x)$ pour un certain $x \in E$; on a alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$, donc y est bien dans le noyau de g .

Le théorème du rang nous dit que la somme des dimensions de l'image et du noyau vaut 3. L'inclusion précédente ne laisse qu'une possibilité (sachant que $\text{Im}(v)$ n'est pas réduit à $\{0\}$) :

$$\text{Im}(v) \text{ est de dimension 1, et } \text{Ker}(v) \text{ est de dimension 2.}$$

- (b) Fixons e_3 en dehors du noyau (c'est possible car $v \neq 0$). On définit alors $e_1 = v(e_3)$. On a alors e_1 qui est non nul (car $e_3 \notin \text{Ker}(v)$) et qui appartient au noyau de v (car $v(e_1) = v(v(e_3)) = v^2(e_3) = 0$). En tant que famille libre du noyau, on peut le compléter en une base de $\text{Ker}(v)$ à l'aide d'un vecteur (on sait que $\text{Ker}(v)$ est de dimension 2); notons e_2 ce vecteur, et montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

Il suffit de montrer la liberté (famille de 3 vecteurs en dimension 3); supposons donc : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. En appliquant v , on obtient $\gamma v(e_3) = 0$ (les deux autres vecteurs sont dans le noyau de v); or $v(e_3) \neq 0$, donc $\gamma = 0$. Maintenant, $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, or (e_1, e_2) est libre en tant que base de $\text{Ker}(v)$. Ainsi, $\alpha = \beta = 0$, et la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre, puis constitue une base de E .

Par construction, la matrice de v dans cette base est exactement celle recherchée (e_1 et e_2 sont dans le noyau, et e_3 est envoyé sur e_1) :

$$\text{Mat}(v, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Tout d'abord : $w^9 = (w^3)^3 = v^3 = 0$. Ainsi, w est un endomorphisme nilpotent. On sait alors que son indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace ambiant, à savoir 3. Ceci impose : $w^3 = 0$.

Bizarre : on a aussi $w^3 = v \neq 0$, ce qui est absurde !

L'énoncé travaillait avec un *hypothétique* $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w^3 = u \dots$ donc un tel w n'existe pas !

Établissons rapidement le résultat admis dans cette question, en notant p l'indice de nilpotence. Puisque $v^{p-1} \neq 0$, il existe x_0 tel que $v^{p-1}(x_0) \neq 0$; on montre alors classiquement que $(x_0, v(x_0), \dots, v^{p-1}(x_0))$ est libre. Et puisqu'elle est de cardinal p , l'espace ambiant est de dimension au moins p .

- (d) i. Si $z^2 = v$, alors $v \circ z = z^2 \circ z = z^3 = z \circ z^2 = z \circ v$. La suite est quasiment un résultat de cours : si $x \in \text{Ker}(v)$ alors $v(z(x)) = z(v(x)) = z(0) = 0$ donc $z(x) \in \text{Ker}(v)$, ce qui prouve la stabilité de $\text{Ker}(v)$ par z . C'est légèrement différent mais du même niveau pour l'image (et ici, je n'accepterais pas les « de même » : images et noyaux sont vraiment de natures différentes). Fixons donc $y \in \text{Im}(v)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a alors $z(y) = z(v(x)) = v(z(x))$ donc $z(y) \in \text{Im}(v)$, et $\text{Im}(v)$ est bien stable par z .

v et z commutent, ce dont on déduit que $\text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(v)$ sont stables par z .

Des bases de l'image et du noyau de v étant connues, on sait que $z(e_1)$ doit appartenir à l'image, donc est de la forme αe_1 . De même pour $z(e_2)$, qui appartient à $\text{Im}(v) = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Ainsi :

$$\text{Si } z^2 = v, \text{ alors } \text{Mat}(z, \mathcal{E}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & \times & \times \\ 0 & \beta & \times \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

- ii. Poussons l'analyse plus loin : si $z^2 = v$, alors non seulement la matrice de z dans $\mathcal{E}$ est de la forme précédente, mais son carré vaut $\text{Mat}(v, \mathcal{E})$, donc en regardant les éléments diagonaux, on voit que

$$\text{Mat}(z, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors lancer l'analyse en prenant une telle matrice et en la mettant au carré cette matrice : on voit qu'on trouve la matrice de v dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $ac = 1$ (sans condition sur b).

$$z^2 = v \text{ si et seulement si } \text{Mat}(z, \mathcal{E}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.$$