À rendre le mardi 14 octobre 2025 dernier délai (le lundi 13 dans mon casier, c'est mieux).

1 Du calcul matriciel

Dans cet exercice, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

On note u l'endmorphisme de $E = \mathbb{R}^5$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le rang de A.
2. Donner une base du noyau de u.
3. Trouver un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$.
4. Donner une base de l'image de u, puis la compléter en une base de E.
5. Trouver P et Q dans $\mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ telles que $PAQ = J_r$, avec r le rang de A.
6. Calculer P^{-1} et Q^{-1}.

2 Un système linéaire et des probabilités basse tension

On s'intéresse au système linéaire

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

avec a, b et c trois entiers de $[\![1, 6]\!]$ issus de trois lancers de dés indépendants.

1. Donner une/des condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) simple(s) portant (éventuellement !) sur a, b et c pour que le système possède une unique solution.
   On justifiera soigneusement, en s'interdisant de parler de déterminant de système (comme en terminale).
2. En déduire la probabilité pour que, après lancer de dés, le système possède effectivement une unique solution.
3. Même chose (caractérisation puis probabilité) pour que le système possède une infinité de solution.
4. Même chose pour que le système ne possède *pas* de solution.
   Arrivé ici, on peut peut-être faire une petite vérification...
5. Et enfin, même chose pour que $(x, y) = (3, 0)$ soit solution du système.