



## Double impact

*Le 4 octobre 2025 – calculatrices autorisées*

La première partie de ce sujet est constituée de question de cours. Elle doit être rendue après au moins 30 minutes et au plus une heure ; la suite de l'énoncé vous sera alors distribuée.

### 1 Cours

1. (*Oui, j'ai de la suite dans les idées...*)

Donner un énoncé précis décrivant les complexes  $z$  vérifiant  $z^8 = 1$ . Prouver ENSUITE cet énoncé, et enfin faire un dessin représentant cet ensemble.

2. (*Oui, j'ai de la suite dans les idées...*)

Montrer que  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge et que  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge.

3. Montrer que si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux sous-espaces d'un espace de dimension finie, alors la dimension de  $E_1 + E_2$  est... ce qu'on sait !

4. Définir ce qu'est une projection.

5. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent (il existe  $N > 0$  tel que  $u^N = 0$ ), avec  $E$  de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire.

*On pourra traiter soigneusement le cas où  $u^2 \neq 0$  mais  $u^3 = 0$ , puis décrire le mieux possible (c'est-à-dire de façon succincte et précise) ce qui se passe dans le cas général.*

L'application  $\Phi : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P'$  est-elle nilpotente ? (justifier la réponse !)

## 2 Un opérateur sur les polynômes

On veillera à distinguer un éventuel réel  $x$  du polynôme  $X$ ... de même qu'un polynôme  $P$  de son évaluation  $P(n)$  en un entier donné...

Dans cet exercice,  $E$  désigne  $\mathbb{R}[X]$  et pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $E_p = \mathbb{K}_p[X]$ . On définit l'application :

$$\Phi \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto P(X) - P(X-1) \end{cases}$$

1. Vérifier que  $\Phi$  est linéaire, et déterminer le degré de  $\Phi(X^i)$  lorsque  $i \in \mathbb{N}$ .
2. Déterminer le degré de  $\Phi(P)$  en fonction de celui de  $P$ . Montrer que  $\Phi$  induit un endomorphisme de  $E_p$  (noté  $\Phi_p$ ).
3. Déterminer la matrice de  $\Phi_p$  dans la base canonique de  $E_p$ .
4. Déterminer le noyau et l'image de  $\Phi_p$ .
5. Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $P \in E_{p+1}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^p = P(n)$$

On pourra s'intéresser à l'équation  $\Phi(Q) = X^p$ ...

6. Application : exprimer  $\sum_{k=1}^n k^3$  à l'aide d'un polynôme en  $n$ .

## 3 Des récurrences linéaires

Le but du problème est de déterminer les suites complexes vérifiant les équations de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + au_n = P(n)\rho^n \quad (1)$$

et (celles vérifiant)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = P(n)\rho^n \quad (2).$$

On veillera à toujours distinguer une suite  $u$  de son terme  $u_n$ , ou encore de  $u_n$ ...

### 3.1 Premier ordre

On se donne ici  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$ , deux complexes  $a$  et  $\rho$  (avec  $a \neq 0$ ), et on s'intéresse dans cette partie à l'ensemble  $\mathcal{S}_1$  des suites complexes  $u$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + au_n = P(n)\rho^n. \quad (1)$$

$\mathcal{S}_{H_1}$  désignera l'ensemble des solutions de l'équation homogène (« sans second membre ») associée, c'est-à-dire l'ensemble des suites  $u$  telles que  $u_{n+1} + au_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. (a) Quelle est la nature des éléments de  $\mathcal{S}_{H_1}$  ? (bon, allez, je reformule : « déterminer  $\mathcal{S}_{H_1}$  »).  
(b) Montrer que  $\mathcal{S}_{H_1}$  est une droite vectorielle (dans l'espace  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  des suites complexes) dont on donnera une base.
2. Dans cette question ET SEULEMENT CETTE QUESTION on suppose que  $v$  est solution de (1) et qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on a  $v_n = Q(n)\rho^n$ .  
Exprimer une relation simple entre  $Q(n+1)$ ,  $Q(n)$  etc qui doit être vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Si  $Q \in \mathbb{C}[X]$ , on note  $\Delta(Q)$  le polynôme  $\rho Q(X+1) + aQ(X)$ .  
(a) Calculer le degré de  $\Delta(Q)$  en fonction de celui de  $Q$ .  
On distinguera les cas :  $\rho = -a$  et  $\rho \neq -a$ .  
(b) Si  $\rho \neq -a$ , montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbb{C}_n[X]$  tel que la suite de terme général  $u_n = Q(n)\rho^n$  soit solution de (1).  
On pourra montrer que l'application  $\Delta_n : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ ,  $Q \mapsto \Delta(Q)$  est bijective.

- (c) Si  $\rho = -a$ , montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$  tel que la suite de terme général  $u_n = Q(n)\rho^n$  soit solution de (1). A-t-on unicité de  $Q$  ?
4. Soit  $U$  une solution de (1) (dont l'existence a été montrée dans la question précédente). Décrire  $\mathcal{S}_1$  à l'aide de  $U$  et  $\mathcal{S}_{H_1}$ .
5. (a) Déterminer l'ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant  $u_{n+1} - 2u_n = n^2 + 2$ .  
 (b) Déterminer l'ensemble des suites réelles  $v$  vérifiant  $u_{n+1} + u_n = (-1)^n n + 2n + 1$ .

### 3.2 Deuxième ordre

On se donne ici  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$ , trois complexes  $a, b, \rho$  (avec  $b \neq 0$ ), et on s'intéresse dans cette partie à l'ensemble  $\mathcal{S}_2$  des suites complexes  $u$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = P(n)\rho^n \quad (2).$$

1. Dans cette question on va retrouver (sans les utiliser, donc...) les résultats que vous connaissez bien sur l'équation homogène ( $H_2$ ) associée à (2).  
*Si vous ne comprenez pas où on va, vous pouvez zapper cette question et utiliser ensuite les résultats bien connus sur le sujet (du programme de première année, et rappelés en début d'année)*
- (a) On suppose ici que le polynôme  $X^2 + aX + b$  possède deux racines distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ; on note  $U$  et  $V$  les suites de termes généraux respectifs  $U_n = \lambda_1^n$  et  $V_n = \lambda_2^n$ . Montrer que  $\mathcal{S}_{H_2} = \text{Vect}(U, V)$ .  
*Pour  $\subset$ , on pourra fixer  $u \in \mathcal{S}_{H_2}$ , et chercher par analyse-synthèse  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  tels que  $u = \alpha U + \beta V$ , en regardant les premiers termes dans la phase d'analyse.*
- (b) On suppose ici que le polynôme  $X^2 + aX + b$  possède une racine double  $\lambda_0$  ; on note  $U$  et  $V$  les suites de termes généraux respectifs  $U_n = \lambda_0^n$  et  $V_n = n\lambda_0^n$ . Montrer que  $\mathcal{S}_{H_2} = \text{Vect}(U, V)$ .
2. On cherche ici une solution particulière de (2) de la forme  $(Q(n)\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On définit pour cela un endomorphisme  $\Phi$  de  $\mathbb{C}[X]$  par :

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X], \quad \Phi(Q) = \rho^2 Q(X+2) + a\rho Q(X+1) + bQ(X)$$

- (a) Etudier (pour  $p \in \mathbb{N}$ ) le degré de  $\Phi(X^p)$  puis celui de  $\Phi(Q)$  en fonction de celui de  $Q$ . On distinguera le cas où  $\rho$  est racine (éventuellement double) de  $X^2 + aX + b$ , et on fera attention aux petites valeurs de  $p$ .
- (b) Montrer que  $\Phi$  est surjective. En déduire l'existence d'une solution de (2) dont le terme général est de la forme  $\rho^n Q_0(n)$  avec  $Q_0$  un polynôme dont on donnera le degré.
3. Décrire  $\mathcal{S}_2$  à l'aide de  $\mathcal{S}_{H_2}$  et d'une solution particulière.
4. Exemples :
- (a) Déterminer l'ensemble des suites réelles  $u$  vérifiant  $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n + n$ .
- (b) Déterminer l'ensemble des suites réelles  $v$  vérifiant  $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n + n3^n$  avec les conditions initiales  $v_0 = 1$  et  $v_1 = 4$ .
- (c) Déterminer l'ensemble des suites réelles  $w$  vérifiant  $w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n + n^2 2^n$ , avec les conditions initiales  $w_0 = -1$  et  $w_1 = 2$ .