

Double impact

1 Cours

1. On va montrer :

$$\{z \in \mathbb{C}; z^8 = 1\} = \{e^{2ik\pi/8} \mid k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket\}$$

Notons E_1 l'ensemble de gauche et E_2 celui de droite.

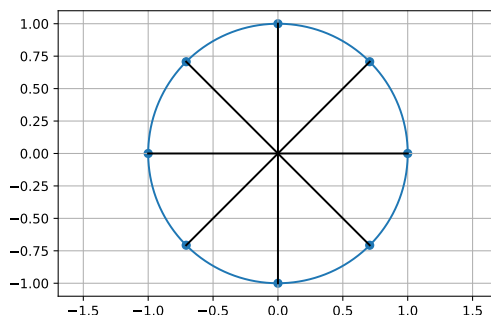
— L'inclusion $E_2 \subset E_1$ est une simple vérification : si $z \in E_2$ alors il existe $k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ tel que $z = e^{2ik\pi/8}$, et on a alors $z^8 = e^{2ik\pi} = 1$, donc $z \in E_1$.

— Réciproquement : si $z \in E_1$, on l'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ (en cherchant la preuve au brouillon vous avez probablement écrit $\theta \in \mathbb{R}$ dans un premier temps, avant de réaliser en fin de preuve que pour localiser k , il était pratique de localiser θ dans l'intervalle suffisant $[0, 2\pi[$).

On a $\rho^8 e^{8i\theta} = 1$, donc en observant le module on a $\rho^8 = 1$, ce qui impose (puisque ρ est un réel positif) : $\rho = 1$. On obtient ensuite $e^{8i\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $8\theta = 2k\pi$.

Bien entendu personne n'aura écrit un charabia à base de $e^{8i\theta} = e^{2ik\pi}$ pour tout k donc... donc quoi ? Donc $8\theta = 2k\pi$ bien entendu ! (NON !) Ce qu'on utilise c'est le fait que les seuls réels φ vérifiant $e^{i\varphi} = 1$ sont ceux de la forme $2k\pi$ avec k entier.

Bref, $z = e^{2ik\pi/8}$, et il reste à localiser k , ce qu'on obtient facilement grâce à l'encadrement $0 \leq \theta < 2\pi$ qui fournit $0 \leq k < 8$ et permet de conclure puisque k est entier.



2. — On définit pour $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, et par définition la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est équivalente à la convergence de la suite (S_n) . Or :

— d'une part (S_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} > S_n$;

— d'autre part la majoration $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$ (qu'on voit sur un dessin fait sur la copie bien entendu, et qu'on prouve par intégration d'une inégalité) sommée pour k allant de 2 à n permet (après ajout du terme manquant et Chaslisation) de prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

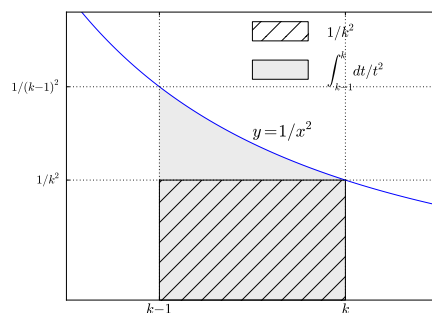


FIGURE 1 – Toujours le même dessin...

Ainsi, (S_n) est croissante et majorée (par la *constante 2*) donc converge, ce qui par définition nous assure que :

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

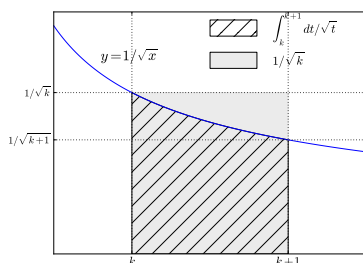
- On définit maintenant pour $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, et on va montrer la divergence de la série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ en montrant : } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La croissance de (S_n) sera ici sans objet...

La minoration $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ (qu'on voit sur un dessin fait sur la copie bien entendu, et qu'on prouve par intégration d'une inégalité...) sommée pour k allant de 1 à n permet de prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$



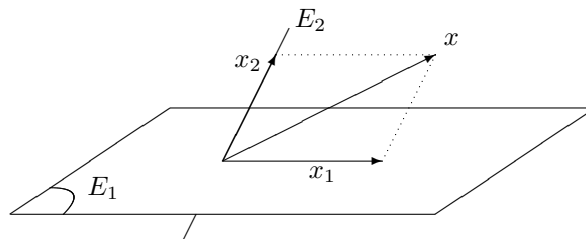
Minorée par une suite tendant vers $+\infty$, la suite (S_n) va donc elle-même tendre vers $+\infty$.

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

- On choisit une base de l'intersection, qu'on complète (en tant que famille libre) d'une part en une base de E_1 et d'autre part en une base de E_2 . On regroupe les trois familles pour en faire une dont on montre (liberté et caractère générateur) qu'elle constitue une base de $E_1 + E_2$, et il reste à compter le nombre d'habitants de chacune des 4 bases...

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$$

- Pour parler de projection il faut disposer de deux sous-espaces supplémentaires, et on va alors projeter sur l'un parallèlement à l'autre.



Supposons donc : $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur x se décompose alors de façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. La projection de x sur E_1 parallèlement à E_2 est alors x_1 .

5. — Dans le cas où l'indice de nilpotence est 3, on regarde droit dans les yeux les inclusions :

$$\{0\} \subset \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3) = E$$

On prend alors une base $(e_1, \dots, e_k)$ du noyau de u , qui constitue une famille libre de $\text{Ker}(u)$... donc de $\text{Ker}(u^2)$: on la complète donc en une base $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_r)$ de $\text{Ker}(u^2)$... puis on complète tout ça en une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s)$ de $\text{Ker}(u^3) = E$.

À quoi ressemble la matrice de u dans $\mathcal{E}$?

- Les e_i sont dans le noyau de u donc sont envoyés sur 0 ;
- Les f_i sont dans $\text{Ker}(u^2)$ donc les $u(f_i)$ sont dans $\text{Ker}(u)$ donc sont combinaisons linéaires de e_i (les colonnes correspondantes dans la matrice sont donc « confinées sur le premier bloc »).
- Les g_i sont dans $\text{Ker}(u^3)$ donc les $u(g_i)$ sont dans $\text{Ker}(u^2)$ donc sont combinaisons linéaires de e_i et f_i .

Le théorème 1-2-3-4-5 permet de conclure.

- Dans le cas général, c'est essentiellement la même chose : on note k l'indice de nilpotence de u , de sorte que :

$$\{0\} \subset \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(u^{k-1}) \subset \text{Ker}(u^k) = E$$

On part alors d'une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker}(u)$ qu'on complète en une base de $\text{Ker}(u^2)$ puis des suivants, via des familles $\mathcal{B}_2$... jusqu'à $\mathcal{B}_k$ pour que la concaténée des $\mathcal{B}_i$ constitue alors une base de E , et bien entendu tout vecteur de $\mathcal{B}_i$ est dans $\text{Ker}(u^i)$ donc a son image dans $\text{Ker}(u^{i-1})$ donc qui s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{i-1}$. On observe alors la matrice de u dans cette base...

c.q.f.d. once again.

Si $N \in \mathbb{N}$, alors $\Phi^N(X^N) = N! \neq 0$ donc $\Phi^N \neq 0$, donc :

Φ n'est pas nilpotente.

2 Un opérateur sur les polynômes

1. Simple vérification ! BIEN ENTENDU, il ne s'agit pas de vérifier que $t \mapsto P(t) - P(t-1)$ est linéaire, mais plutôt :

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda \Phi(P_1) + \Phi(P_2),$$

ce qui se fait sans mal !

Si $i = 0$, alors $\Phi(X^i) = \Phi(1) = 0$. Sinon, $\Phi(X^i) = X^i - (X^i - iX^{i-1} + \dots) = iX^{i-1} + \dots$, qui est de degré $i-1$.

2. D'après ce qui précède : si P est constant, alors $\Phi(P) = 0$; sinon, $\Phi(P)$ a pour degré celui de P moins un.

$$\deg(\Phi(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les polynômes de E_p ont donc leur image dans E_{p-1} , donc dans E_p .

Φ induit donc un endomorphisme de E_p

3. $\Phi(X^p) = - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k$ (binôme de Newton...), de sorte que Φ a pour matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & n \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

avec pour $j > i$: $a_{i,j} = (-1)^{j-i+1} \binom{j-1}{i-1}$ (composante de $\Phi(X^{j-1})$ selon X^{i-1}).

4. Le rang de cette matrice $(n+1, n+1)$ est clairement n (les n dernières colonnes sont échelonnées, donc libres). L'image de Φ_n est donc un sous-espace de E_{n-1} de dimension n , donc $\text{Im } \Phi_n = E_{n-1}$. Le théorème du rang nous assure que $\text{Ker } \Phi_n$ est de dimension 1. Comme il contient clairement les polynômes constants, on a $\text{Ker } \Phi_n = E_0$.

On pouvait aussi invoquer le fait que la famille $(\Phi(X), \Phi(X^2); \dots, \Phi(X^p))$ est échelonnée en degrés dans E_{p-1} , donc en constitue une base. Mais elle engendre par ailleurs $\text{Im } \Phi_p$, donc $\text{Im } \Phi_p = \mathbb{R}_{p-1}[X]$

$\text{Ker } (\Phi_p) = E_0$ et $\text{Im } (\Phi_p) = E_{p-1}$

5. — **Pour l'unicité**, notons que si P_1 et P_2 répondent au problème, alors leur différence admet pour racines tous les entiers, ce qui représente une infinité de valeurs, donc $P_1 - P_2 = 0$.
 — **Pour l'existence**, notons Q un élément de E_{p+1} tel que $\Phi(Q) = X^p$ (l'existence est assurée car $X^p \in E_p = \text{Im } \Phi_{p+1}$). On a $Q(X) - Q(X-1) = X^p$, donc :

$$Q(n) = n^p + Q(n-1) = n^p + (n-1)^p + Q(n-2) = \dots = \sum_{k=1}^n k^p + Q(0).$$

Le polynôme $Q - Q(0)$ répond donc au problème.

6. On cherche $Q = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$ tel que $\Phi(Q) = X^3$. Mais :

$$\begin{aligned} \Phi(Q) &= (a-a) + b(X - (X-1)) + c(X^2 - (X^2 - 2X + 1)) + d(X^3 - (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)) \\ &\quad + e(X^4 - (X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1)) \\ &= (b-c+d-e) + (2c-3d+4e)X + (3d-6e)X^2 + 4eX^3 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent (par **unicité** de la décomposition dans la base $(1, X, \dots, X^3)$) à la résolution

du système triangulaire $\begin{cases} b - c + d - e = 0 \\ 2c - 3d + 4e = 0 \\ 3d - 6e = 0 \\ 4e = 1 \end{cases}$ (il n'y a pas de condition sur a , ce

qui est normal puisque $\Phi(a) = 0\dots$). On trouve alors comme unique solution pour (b, c, d, e) le quadruplet $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Ainsi :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3 Des récurrences linéaires

3.1 Premier ordre

1. (a) Les éléments de $\mathcal{S}_{H_1}$ sont (d'après le cours de première)

les suites géométriques de raison $-a$.

- (b) Une suite géométrique de raison $-a$ a pour terme général $K(-a)^n$, où K est une constante. Si on note V la suite de terme général $V_n = (-a)^n$, cela signifie que les éléments de $\mathcal{S}_{H_1}$ sont les suites de la forme KV . Et donc :

$\mathcal{S}_{H_1}$ est la droite vectorielle de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ engendrée par V .

2. On a ici, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + av_n$ qui vaut d'une part $P(n+1)\rho^n$ et d'autre part $Q(n+1)\rho^{n+1} + aQ(n)\rho^n$, et donc (puisque $\rho^n \neq 0$) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho Q(n+1) + aQ(n) = 0$.

3. (a) On note $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ où $a_n \neq 0$, $n \geq 0$ (ce qui exclut le cas trivial $Q = 0$). $\Delta(Q)$ est clairement de degré $\leq n$. De plus, le coefficient de X^n de $\Delta(Q)$ vaut $(\rho + a)a_n$
 — Si $\rho \neq -a$, le coefficient de X^n est non nul, donc $\deg \Delta(Q) = \deg Q$.
 — Supposons $\rho = -a$. Dans ce cas le coefficient de X^n est nul. Si $n = 0$, alors $\Delta(Q) = 0$; sinon, le coefficient d'ordre $n-1$ de $\Delta(Q)$ vaut $\rho na_n + \rho a_{n-1} + aa_{n-1} = \rho na_n \neq 0$ car $\rho \neq 0$, donc $\deg \Delta(Q) = \deg Q - 1$.

- (b) Supposons $\rho \neq -a$. La suite de terme général $u_n = Q(n)\rho^n$ est solution de (1) si et seulement si $(\Delta(Q))(n) = P(n)$ pour tout n (question 2). Cette relation valable pour tout n est équivalente à $\Delta(Q) = P$ (pour l'implication non évidente : deux polynômes égaux sur tous les entiers sont égaux tout court, car leur différence admet une infinité de racines...).

On veut montrer que P possède un antécédent par Δ . L'application Δ_n est injective (regarder son noyau, en utilisant les résultats précédents). Ne serait-elle pas surjective ? Son image est le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par la famille $(\Delta_n(1), \dots, \Delta_n(X^n))$, qui est une famille échelonnée en degrés, donc constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\text{Im } \Delta_n = \mathbb{R}_n[X]$, et Δ_n est donc bijective, fournissant l'existence d'un unique Q tel que $\Delta_n(Q) = P$.

Si $\rho \neq -a$, il existe un unique $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ répondant au problème.

- (c) Si $\rho = -a$, cette fois Δ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{C}_n[X]$: considérer la famille $(\Delta_{n+1}(X), \dots, \Delta_{n+1}(X^{n+1}))$. L'équation $\Delta(Q) = P$ admet donc au moins une solution dans $\mathbb{C}_{n+1}[X]$. Il n'y a pas unicité car pour tout polynôme constant λ , on a $\Delta(\lambda) = 0$, donc dès que $\Delta(Q) = P$, on a aussi $\Delta(Q + \lambda) = P$.

Si $\rho = -a$, il existe une infinité de $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ répondant au problème.

4. Une suite v vérifie (1) si et seulement si la suite $v - U$ vérifie l'équation homogène associée (H_1), et donc :

$$\mathcal{S}_1 = \{U + u \mid u \in \mathcal{S}_{H_1}\}.$$

On peut parler non plus de droite vectorielle, mais de « droite affine » ; on la notera souvent $U + \mathcal{S}_{H_1}$.

5. (a) Ici, $a = -2$ et $\rho = 1$. On cherche donc une solution particulière sous la forme $u_n = Q(n)$ avec $Q \in \mathbb{C}_2[X]$, c'est-à-dire de la forme $aX^2 + bX + c$. On a alors

$$u_{n+1} - 2u_n = (a(n+1)^2 + b(n+1) + c) - 2(an^2 + bn + c) = -an^2 + (2a - b)n + (a + b - c),$$

de sorte qu'il SUFFIT d'avoir $a = -1$, $a - 2b = 0$, et $a + b - c = 2$, c'est-à-dire $u_n = -n^2 - 2n - 5$.

Les solutions recherchées sont donc les suites de terme général $-n^2 - 2n - 5 + \lambda 2^n$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Donne moi (sans justification) l'expression des suites u vérifiant $u(n+1)-2u(n)=n^2+2$ pour tout entier naturel n

Une suite (u_n) vérifiant

$$u_{n+1} - 2u_n = n^2 + 2$$

s'écrit sous la forme :

$$u_n = C \cdot 2^n - n^2 - 2n - 4,$$

où C est une constante réelle arbitraire.

Qui se trompe ?

- (b) Pour trouver une solution particulière, on applique le même principe que pour les équations différentielles : on superpose une solution de $u_{n+1} + u_n = (-1)^n n$ et une solution de $u_{n+1} + u_n = 2n + 1$. Je vous laisse faire les calculs.

Donne moi (sans justification) l'expression des suites u vérifiant $u(n+1)+u(n)=(-1)^n n+2n+1$ pour tout entier naturel n

L'expression générale d'une suite u_n vérifiant

$$u_{n+1} + u_n = (-1)^n n + 2n + 1$$

est :

$$u_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + C \cdot (-1)^n$$

où C est une constante réelle arbitraire.

3.2 Deuxième ordre

1. (a) Déjà, U et V sont dans $\mathcal{S}_{H_2}$ (calculer $U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n$!), qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (vérification immédiate), donc $\text{Vect}(U, V) \subset \mathcal{S}_{H_2}$.

Fixons maintenant $u \in \mathcal{S}_{H_2}$. On cherche α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $u = \alpha U + \beta V$. Fondamentalement, nous avons un système à deux inconnues et... une infinité d'équations : $u_n = \alpha U_n + \beta V_n$, pour TOUT $n \in \mathbb{N}$. Nous allons essayer de voir si on peut résoudre les deux premières équations.

Analyse : Si une telle décomposition existe, on doit avoir $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$. Notre pivot préféré et la condition $\lambda_1 \neq \lambda_2$ nous assurent que ce système admet une (unique) solution¹.

Synthèse : Réciproquement, fixons (α, β) la solution du système précédent, et notons $v = \alpha U + \beta V$. Par choix de α et β , on a $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Mais u et v sont dans $\mathcal{S}_{H_2}$ donc on a d'une part $u_2 = -au_1 - bu_0$ et d'autre part $v_2 = -av_1 - bv_0$, donc $u_2 = v_2$; on prouverait alors par récurrence (double) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$, et ainsi $u = v = \alpha U + \beta V$, et c'est gagné.

- (b) La seule chose nouvelle ici est le fait que $V \in \mathcal{S}_{H_2}$ (tout le reste se passe de la même façon). On calcule donc :

$$V_{n+2} + aV_{n+1} + bV_n = ((n+2)\lambda_0^2 + (n+1)a\lambda_0 + bn)\lambda_0^n = (n(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b) + (2\lambda_0 + a)\lambda_0)\lambda_0^n.$$

Mais λ_0 est racine **double** de $R = X^2 + aX + b$, donc $R(\lambda_0) = \lambda_0^2 + a\lambda_0 + b = 0$, mais également $R'(\lambda_0) = 2\lambda_0 + a = 0$, et c'est gagné.

2. (a) Supposons $p \geq 2$:

$$\Phi(X^p) = (\rho^2 + a\rho + b)X^p + p\rho(2\rho + a)X^{p-1} + \binom{p}{2}(4\rho + a)\rho X^p + \dots$$

— Si ρ n'est pas racine de $R = X^2 + aX + b$, alors $\Phi(X^p)$ est de degré p .

1. il s'agit bien ici d'une résolution : on aura besoin de « remonter » dans la synthèse.

- Si ρ est racine simple, alors $\Phi(X^p)$ est de degré $p-1$ (car $R'(\rho) = 2\rho + a \neq 0$), et de degré $p-2$ si ρ est racine double. Ce résultat reste vrai pour $p=1$ si ρ n'est pas racine double, et pour $p=0$ si ρ n'est pas racine. Dans les autres cas, $\Phi(X^p) = 0$.
En décomposant Q selon les X^p , on constaterait que le résultat persiste en changeant X^p en Q , et p en $\deg Q$.
 - (b) — Si ρ n'est pas racine de $X^2 + aX + b$, on raisonne comme à la question 3b pour établir que Φ induit une bijection de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même. Tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ possède donc un (unique) antécédent par Φ dans $\mathbb{C}_n[X]$.
 - Si ρ est racine simple de $X^2 + aX + b$, on raisonne comme à la question 3c pour établir que Φ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$. Tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ possède donc un (unique) antécédent par Φ dans $\mathbb{C}_{n+1}[X]$. Même principe si ρ est racine double de $X^2 + aX + b$: Φ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+2}[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$.
Si on choisit effectivement $Q_0 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\Phi(Q_0) = P$, alors on vérifie tout simplement que la suite de terme général $\rho^n Q_0(n)$ est une solution particulière.
Le degré de Q_0 est donc celui de P , plus 1 (resp. 2) si ρ est racine simple (resp. double) de $X^2 + aX + b$.
3. On a à nouveau $\mathcal{S}_2 = U + \mathcal{S}_{H_2}$ si U est une solution particulière. On parlera de *plan affine*.
4. La lassitude me gagne... On applique les résultats des questions précédentes. Pour les conditions initiales, on cherche à ajuster les deux paramètres...
Je fais appel à un ami.

Donne moi (sans justification) l'expression des suites u vérifiant $u(n+2) = -u(n+1) + 6u(n) + n$ pour tout entier naturel n

Une suite (u_n) vérifiant

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n + n$$

est de la forme :

$$u_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2},$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

Donne moi (sans justification) l'expression des suites u vérifiant $u(n+2) = 2u(n+1) + 3u(n) + n \cdot 3^n$ pour tout entier naturel n et les conditions initiales $u(0)=1$ et $u(1)=4$

On a la récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + n \cdot 3^n, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 4.$$

La solution générale est

$$u_n = A(-1)^n + B(-3)^n + \frac{n}{16} \cdot 3^n - \frac{3}{64} \cdot 3^n.$$

Avec les conditions initiales :

- pour $n=0$: $u_0 = A + B - \frac{3}{64} = 1$,
- pour $n=1$: $u_1 = -A - 3B + \frac{1}{16} \cdot 3 - \frac{3}{64} \cdot 3 = -A - 3B + \frac{9}{64} = 4$.

On résout :

$$A + B = 1 + \frac{3}{64} = \frac{67}{64}, \quad -A - 3B = 4 - \frac{9}{64} = \frac{247}{64}.$$

Donc

$$A = \frac{37}{16}, \quad B = -\frac{11}{64}.$$

Solution particulière avec conditions données :

$$u_n = \frac{37}{16}(-1)^n - \frac{11}{64}(-3)^n + \frac{n}{16} \cdot 3^n - \frac{3}{64} \cdot 3^n$$

Donne moi (sans justification) l'expression des suites u vérifiant $u(n+2)=4u(n+1)-4u(n)+n^2 \cdot 2^n$ pour tout entier naturel n avec les conditions initiales $u(0)=-1$ et $u(1)=2$

On a la récurrence :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + n^2 \cdot 2^n, \quad u_0 = -1, \quad u_1 = 2.$$

La solution générale est de la forme :

$$u_n = (A + Bn) \cdot 2^n + (an^2 + bn + c) \cdot 2^n.$$

En simplifiant la partie particulière pour $n^2 \cdot 2^n$, on obtient :

$$u_n = (A + Bn) \cdot 2^n + \frac{1}{2}n^4 \cdot 2^n - n^3 \cdot 2^n + \frac{3}{2}n^2 \cdot 2^n$$

et en appliquant les conditions initiales $u_0 = -1$ et $u_1 = 2$, on trouve :

$$u_n = \frac{1}{2}n^4 \cdot 2^n - n^3 \cdot 2^n + \frac{3}{2}n^2 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n + 1 \cdot n \cdot 2^n.$$

Si tu veux, je peux te donner la **version simplifiée finale complètement factorisée**. Veux-tu que je fasse ça ?

Nan, tkt

Parfait 😊 On garde ça comme ça alors.