



Khôlles : quinzaine numéro 3

Du 13 octobre au 7 novembre 2025

Le cours, à défaut de reculer, n'a guère avancé¹...

1 Première semaine : algèbre linéaire

De l'algèbre linéaire... C'était censé être fait depuis une semaine :

- Images et noyaux itérés. Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.
- Hyperplans et formes linéaires (histoire de suivre le programme officiel, mais...).
- Calcul matriciel : changements de bases, réduction du rang ($PAQ = J_r$).

2 Deuxième semaine : fin de l'algèbre linéaire, réduction

En plus : la fin d' l'algèbre linéaire, et le début de la réduction.

- Les matrices de rang 1 ont fait l'objet d'une attention toute particulière.
- Quand une base est adaptée à l'image et/ou au noyau d'une application linéaire (ce qui n'est pas rare, surtout quand on la construit dans ce but...), la matrice de l'application dans cette base n'est pas quelconque!
- Déterminant (en pratique; ne pas creuser la théorie!).
- Polynômes : rappels de première année, interpolation, relations coefficients-racines (aucune à connaître; toutes à savoir retrouver).
- (Re)découverte des projections et symétries.
- Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres; endomorphismes diagonalisables (existence d'une base diagonalisante, ou E s'écrivant comme somme des sous-espaces propres). Extension aux matrices (mais le point de vue géométrique est toujours présent).
- Étude à la main de quelques cas comme les matrices triangulaires, et les endomorphismes ou matrices de rang 1.

3 Questions de cours

- (S1) Grassmann par construction d'une base adaptée.
- (S1) Formule du rang (aka « théorème du rang »).
- (S1) Un sous-espace H d'un espace E de dimension finie est le noyau d'une forme linéaire non nulle si et seulement s'il est de dimension $\dim(E) - 1$.
- (S1+S2) Si A est de rang 1, alors $A^2 = (\text{tr } A)A$.
- (S1+S2) Si M est de rang r , alors il existe P et Q inversibles telles que $PAQ = J_r$.
- (S2) Théorème d'interpolation de Lagrange.
- (S2) Un endomorphisme f vérifie $f \circ f = f$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- (S2) Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- (S2) Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : suite et fin de la réduction.

1. Déjà signalé en 2024; les années se suivent et se ressemblent!