

Réduction des endomorphismes... et des matrices

1 Petit rang... gros noyau

Exercice 1 – ENSAM 2017 [5/10]

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.
2. Soit f un endomorphisme diagonalisable. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 2 – Mines 2018 [6/10]On considère l'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{tr}(M)I_n + M$.

1. L'application ψ est-elle diagonalisable ?
2. L'application ψ est-elle bijective ? Si oui, déterminer ψ^{-1} .
3. Question supplémentaire : quelle est la dimension de $\text{Ker}(\psi - \text{Id})$?

Exercice 3 – TPE 2017 [4/10]Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles. On pose $M = I_n + CL$.

1. Établir : $M^2 = (2 + LC)M - (1 + LC)I_n$.
2. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 – CCP 2017 [5/10]Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & \cdots & a^{2n-2} \end{pmatrix}$

1. Dans le cas $a \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une valeur propre de A .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 5 – Centrale 2016 [6/10]Soit $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$. On définit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n y_i x - x_i y$.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n y_i$ est valeur propre de f , et donner l'espace propre associé. Donner une condition nécessaire et suffisante simple de diagonalisabilité de f .

2. Les matrices $\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_1 \\ y_2 & y_2 & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_n & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 6 – CCP 2016 [5/10]

Soient E de dimension $n \geq 2$, φ une forme linéaire non nulle sur E , et $x_0 \in E$ non nul. On définit l'application

$$u : x \in E \longmapsto x + \varphi(x)x_0$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Montrer que 1 est valeur propre de u , et déterminer le sous-espace propre associé ainsi que sa dimension.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

2 Exemples numériques**Exercice 7 – CCINP 2023 [4/10]**

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, on note $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de M .
2. Calculer le déterminant de M .
On suppose dans cette question que ce déterminant est non nul.
 Déterminer le noyau et l'image de M .
 M est-elle diagonalisable ?
3. On suppose : $a = b$ et $c \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres.
4. Diagonaliser effectivement M dans le cas général.

Exercice 8 – CCP 2018 [6/10]

On définit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
2. Trouver un vecteur appartenant à $\text{Ker}(f^2)$ mais pas à $\text{Ker}(f)$.
3. Expliciter une base de E dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. (a) On suppose que $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $g^2 = f$. Montrer que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g .
 (b) Trouver l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g^2 = f$.

Exercice 9 – Mines-Télécom 2016 [3/10]

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible ? Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
2. Montrer que $A^4 = 0$; en déduire la valeur du spectre de A .
3. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_4)$, avec $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = u(f_1)$, $f_3 = u(f_2)$ et $f_4 = u(f_3)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et donner la matrice de u dans cette base.

Exercice 10 – CCP 2016 [3/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Expliquer pourquoi A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de vecteurs propres de A (les $5/2$ la prendront orthonormée).
3. Diagonaliser A .

Exercice 11 – Mines-Télécom 2016 [3/10]

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 12 – ENSEA 2016 [3/10]

Calculer la puissance n -ième de

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -6 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 7/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 – CCP 2016 [3/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier la diagonalisabilité de $\alpha A + \beta I_3$.

Exercice 14 – CCP 2009 [2/10]

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit λ une valeur propre de f de multiplicité m . Montrer que $1 \leq \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) \leq m$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 – CCP 2010 [6/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifie $B^2 = A$, montrer que A et B commutent.
3. Déterminer $\text{Rac}(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}); B^2 = A\}$.

3 Mais aussi...

Exercice 16 – CCINP 2022 [6/10]

Soit u un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1. Montrer que $\text{Im}(u^2 + \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u)$.
2. En déduire que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$.
3. Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u .
En déduire que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$.

4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 17 – Mines 2016 [7/10]

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$, avec $\text{tr}(M) = n$.

Exercice 18 – Navale 2016 [4/10]

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que M est semblable à $2M$.

1. Quelles sont les valeurs propres de M ? Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

2. On suppose M de rang 1. Montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 19 – Encore un classique : théorème de Gerschgorin [5/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer :

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_f \left(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right)$$

(il s'agit de disques fermés).

Exercice 20 – Mines 2010 (MP) [7/10]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } M = \text{Ker } M^2$.

Exercice 21 – TPE 2011

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 22 – Mines 2012 [6/10]

Soit $n \geq 2$. Résoudre $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 23 – CCP 2018 [6/10]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable? inversible? Donner ses éléments propres.
2. Donner les éléments propres de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ Est-elle diagonalisable?

Exercice 24 – Mines 2018 [9/10]

1. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Déterminer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & (0) & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $M^3 + M + I_n = 0$?

On pourra admettre que le polynôme $X^3 + X + 1$ ne possède pas de racine rationnelle; les ex-MPSI pourront essayer de le montrer en question bonus!

Exercice 25 – Mines 2018 [6/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de I_n .

Exercice 26 – Centrale 2018 [7/10]

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. On note E_X l'ensemble des matrices ayant X comme vecteur propre.

1. Montrer que E_X est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E_X .

3. Expliciter E_X lorsque $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 27 – Centrale 2018 [1/10]

Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

Exercice 28 – CCP 2018 (3 fois, à des dates différentes!) [3/10]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k B - B A^k = k\alpha A^k$.
2. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 29 – Mines 2018 [8/10]

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & (0) & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que A soit diagonalisable.

Exercice 30 – Mines 2018 [7/10]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices réelles (n, n) à coefficients dans $[0, 1]$ dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

1. Expliciter une valeur propre et un vecteur propres commun(ne)s à toutes les matrices de $\mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.
3. Soit $A \in \mathcal{S}$.
 - (a) Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module ≤ 1 .
 - (b) Montrer que $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Ker}((A - I_n)^2)$.

4 Posés en colle

Exercice 31 – C. Stérin 2023-2024 [9/10]

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et on définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A_n .
2. Calculer A_n^n et déterminer sa limite.

Exercice 32 – *L. Mermet 2023-2024 [3/10]*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que AB est diagonalisable et A est inversible. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 33 – *L. Mermet 2023-2024 [7/10]*

On définit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable... et diagonaliser effectivement A !
2. Résoudre $M^2 + M = A$.

Exercice 34 – *L. Mermet 2023-2024 [7/10]*

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $N = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

1. N est-elle diagonalisable?
2. La matrice $M = 2N + I$ est-elle inversible? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 35 – *L. Mermet 2023-2024 [7/10]*

Résoudre $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 36 – *L. Mermet 2023-2024 [8/10]*

On suppose f et g diagonalisables et qui commutent. Montrer qu'ils sont codiagonalisables, i.e. : il existe une base dans laquelle les matrices de f et de g sont simultanément diagonalisables.

On pourra se concentrer sur la restriction de l'un à un sous-espace propre de l'autre.

Exercice 37 – *C. Stérin 2023-2024 [3/10]*

Les matrices suivantes de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ sont-elles diagonalisables?

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Exercice 38 – *P. Bel 2023-2024 [6/10]*

Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple portant sur u_0, v_0, w_0 pour que les trois suites u, v et w vérifiant les relations suivantes soient simultanément bornées :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Exercice 39 – *L. Mermet 2023-2024 [8/10]*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est diagonalisable, et déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f .

Exercice 40 – *P. Bel 2023-2024 [9/10]*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 41 – B. Saleur 2023-2024 [5/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. Déterminer le commutant de D (ce qu'on imagine) puis de A .

Exercice 42 – B. Saleur 2023-2024 [5/10]

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de a , puis établir pour quels a la matrice A est diagonalisable.

5 Des indications

Exercice 1 – Toute la discussion portera sur le fait que la deuxième valeur propre (qui est la trace, soit $a + n - 1$) est nulle ou non...

Exercice 2 – L'application $\psi - \text{Id}$ a pour noyau celui d'une forme linéaire non nulle, qui est donc un hyperplan. Puisque $\psi(I_n) = (n+1)I_n$, on a une deuxième valeur propre... Pour la recherche de l'inverse, on peut par exemple noter que $\psi^2(M) = \dots$ puis que $\psi^2 = \dots$ puis $\psi \circ (\dots) = \text{Id}$; etc.

Exercice 3 – Hum... $M - I$ ne serait-elle pas de rang 1 ? Il s'agit alors de savoir si sa trace $CL = \sum c_i \ell_i$ est nulle ou pas... Mais on peut aussi respecter l'esprit de l'énoncé et privilégier le point de vue « polynôme annulateur » !

Exercice 4 – Encore une matrice de rang 1 ; il s'agit alors de savoir si l'image est incluse ou non dans le noyau, ce qui donne la condition : $1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n-2} \neq 0$. On retrouve cette condition si on le pense plutôt en termes de trace...

Exercice 5 – $\text{Ker}(f - (\sum \lambda_i)\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$, et f est diagonalisable si et seulement si $y \not\propto \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme toujours, la première matrice (de rang 1) est diagonalisable si et seulement si son image n'est pas incluse dans le noyau, c'est-à-dire : $\sum y_i \neq 0$.

Exercice 6 – $u - \text{Id}_E$ est de rang 1... Et si on travaillait dans une base adaptée au problème ? Genre commençant avec une base du noyau de φ ? Le fait que x_0 appartienne ou non à ce noyau devra à un moment ou un autre être discuté.

Exercice 7 – Le polynôme caractéristique est $(X - b)(X - a - c)(X - a + c)$, et il n'est pas difficile d'expliciter trois vecteurs propres assez simples et constituant une base de $\mathbb{R}^3$, indépendamment du fait que les valeurs propres soient distinctes ou non. Ce qui trivialise le reste de l'exercice !

Exercice 8 – Comme bases respectives des sous-espaces proposés, je trouve $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ vs. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(le premier vecteur de la première base répondant d'ailleurs à la deuxième question...). Il n'y a plus qu'à réordonner pour répondre à la troisième question. Pour la dernière question, l'analyse nous propose comme candidats les endomorphismes dont la matrice dans la base adaptée précédente est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$ mais la synthèse est impitoyable : tous les candidats sont rejetés.

Exercice 9 – Les deux premières lignes sont égales... ensuite, il s'agit d'une étude plutôt guidée d'un nilpotent !

Exercice 10 – On (les 5/2!) peut voir une matrice symétrique réelle ; ou reconnaître en A la cousine de $A + 2I_3$... dont la réduction a peut-être déjà été évoquée une ou deux fois...

Exercice 11 – A est de rang 1, et son image – engendrée par $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ – est dans le noyau (check it!),

donc on doit pouvoir prendre une base de $\mathbb{R}^3$ très bien adaptée à la géométrie de l'endomorphisme canoniquement associé à A en prenant f_3 en dehors du noyau, puis $f_1 = u(f_3)$, puis f_2 complétant f_1 pour en faire une base du noyau...

Exercice 12 – $\chi_A = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X(X - 1/2)(X - 1)$... et merci de ne pas diagonaliser mais plutôt de diviser euclidiennement X^n par ce polynôme, annulateur d'après Cayley-Hamilton.

Exercice 13 – $\chi_A = X(X - 1)^2$ et $\text{rg}(A - I) = 1$...

Exercice 14 – Petit rang, gros noyau...

Exercice 15 – $\text{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$; vecteurs propres : $(1, -2, 4)$, $(1, -2, 5)$ et $(3, -4, 12)$.

Exercice 16 – Une fois la première inclusion établie, le théorème du rang dit que la somme des dimensions des deux noyaux vaut au moins 3 ; il reste alors à montrer que l'intersection est triviale. Ensuite, la dimension assure l'existence d'une valeur propre réelle (un polynôme réel de degré 3 possède forcément une racine). Il reste à montrer que les dimensions sont respectivement de 1 et 2 et non l'inverse. Par l'absurde, un sous-espace stable de dimension 1 est forcément dirigé par un vecteur propre...

Exercice 17 – Les racines (complexes) du polynôme auquel on pense sont dans un petit ensemble, et on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire quand on écrit que la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités. Tout cela se passe bien entendu dans l'analyse, et on obtient alors nécessairement M inversible, puis $M^3 = I$, puis M diagonalisable sur $\mathbb{C}$, etc.

Exercice 18 – Le spectre (qui est non vide) ne peut contenir que 0 ; M est donc nilpotente. Ensuite si f^2 était non nul, il existerait une base dans laquelle la matrice de f vaudrait $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc f serait de rang 2. Finalement, $\text{Im}(f)$ est une droite incluse dans le plan $\text{Ker}(f)$, et on doit pouvoir construire une base adaptée à cette inclusion...

Exercice 19 – Penser au « critère » de la diagonale dominante (aka Hadamard).

Exercice 20 – Un sens n'est pas trop compliqué... Pour l'autre, on diagonalise M^2 et on regarde les restrictions de M aux sous-espaces propres de M^2 : le seul sous-espace qui pourrait poser problème est $\text{Ker}(M^2)$, mais en fait...

Exercice 21 – Le calcul direct peut être casse-pieds. Le rang et la trace donnent beaucoup d'informations. On peut terminer avec la trace de A^2 (malin...).

Exercice 22 – A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$... Attention, il est assez facile de trouver des solutions au problème... mais pour être certain qu'on les a toutes, une géométrisation est indispensable.

Exercice 23 – Même si on ne reconnaît pas une matrice symétrique réelle, les éléments propres de A se calculent sans mal. Ceux de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont également simples, et permettent de construire des éléments propres pour $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ facilement : par exemple si $Af_1 = 3f_1$, alors en posant $X = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$...

Exercice 24 – Il s'agit d'une matrice « de Frobenius »/« compagnon », de polynôme caractéristique $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Elle nous fournit des matrices de taille 3 puis $3k$ à coefficients entiers ayant comme polynôme annulateur $X^3 + X + 1$. Réciproquement, une matrice possédant un tel polynôme annulateur, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (étude de fonction : une seule racine, simple, sur $\mathbb{R}$...) est forcément diagonalisable. Si on note n_1, n_2 et n_3 les dimensions des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres $x_1 \in \mathbb{R}, x_2$ et $x_3 = \overline{x_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3\overline{x_2}$ est la trace de cette matrice, donc est dans $\mathbb{R}$, donc (partie imaginaire) $n_2 = n_3$. Comme la somme des racines est nulle, on a même $(n_1 - n_2)x_1$ qui vaut la trace de la matrice initiale, donc est un entier. S'il était non nul, x_1 serait rationnel, ce qui est exclu (ex-MPSI : écrivez $x_1 = p/q$ avec p et q premiers entre eux ; on a alors $p^2(p+q) = -q^3$: que dire alors d'un premier qui diviserait q donc q^3 ?). Ainsi, $n_1 = n_2 = n_3$, et la dimension globale est bien un multiple de 3.

Exercice 25 – Si P est un polynôme, que vaut $P(B)$? Ensuite : le rang de $B - I_{2n}$ vaut (par pivot) n donc la multiplicité de 1 comme racine du polynôme caractéristique vaut la dimension du sous-espace propre associé, c'est-à-dire $2n - n$; etc...

Exercice 26 – On complète X en une base de $\mathbb{R}^n/\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, fournissant une matrice de passage P telle que : $M \in E_X$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & L \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Pour l'appli-

cation numérique on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

Exercice 27 – J'imagine que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ doit faire l'affaire...

Exercice 28 – Classique : l'opérateur $M \mapsto MB - BM$ possède un nombre fini de valeurs propres...

Exercice 29 – Pour que A soit diagonalisable, il est évidemment suffisant que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ soit scindé à racines simples... mais c'est également nécessaire. En effet si A était diagonalisable avec $p < n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ serait annulateur de A . Mais si on regarde la première colonne de $P(A)$ (après avoir calculé $A^2, A^3 \dots$) on voit que c'est impossible. En termes snobs on dit que χ_A est ici le polynôme minimal de A .

Exercice 30 – Je trouve ça un peu difficile sans indication (la dernière question ; les précédentes ayant été traitées quelques fois dans l'année...). J'ai choisi X dans le noyau de $(A - I)^2$: $(A^n X)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, mais en écrivant $A = I + (A - I)$ et en Newtonisant on obtient $A^n X = X + n(A - I)X \dots$

Exercice 31 – A_n n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Informellement, il n'est pas déraisonnable de noter $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et constater que $J^2 = -I$, ce qui laisse penser que J a dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le rôle que i a dans $\mathbb{C}$, et donc intuitiver que A_n^n converge vers...

La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ permet de diagonaliser effectivement A_n . Il reste ensuite à établir (ce n'est pas évident !) que $(1 - i\alpha/n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-i\alpha)$ pour obtenir quelques lignes plus loin :

$$A_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 32 – Ack affreux : $BA = A^{-1}(AB)A$.

Exercice 33 – Il me semble que $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ fait le job avec $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le reste est standard (analyse, sous-espaces de l'un stable par l'autre, etc), fournissant 4 solutions.

Exercice 34 – Matrice de rang 1 et trace strictement positive, donc diagonalisable. Plus précisément, N est semblable à $\text{Diag}(0, \dots, 0, \sigma)$, avec $\sigma = a_1 + \dots + a_n$. Grâce à la question précédente, M est inversible si et seulement si $2\sigma + 1 \neq 0$. Puisque $N^2 = \sigma N$, on a après calcul $M^2 = 2(\sigma + 1)M - (2\sigma + 1)I_n$, ce qui permet après factorisation/agitation de bras/termes de trouver M^{-1} .

Exercice 35 – Après diagonalisation il s'agit de résoudre au choix $N^2 + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $f^2 + f = g$ avec g diagonalisable de spectre simple $\{-1, 1\}$.

Exercice 36 – Écrivons $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$ avec $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Chaque $E_i = E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g (puisque f et g commutent), et puisque g possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, ce polynôme reste annulateur pour la restriction de g à E_i , de sorte que cette restriction est diagonalisable, nous fournissant une base de E_i intéressante à la fois pour g et pour f . Il n'y a plus qu'à recoller ces bases.

Exercice 37 – La deuxième matrice a un carré intéressant. La première aussi, mais on peut aussi observer son spectre et la dimension des sous-espaces propres associés, comme la dernière.

Exercice 38 – La matrice A en jeu est la cousine d'une autre bien connue : $A + 2I$ est de rang 1, puis semblable à $D = \text{Diag}(3, 0, 0)$ via la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En traduisant les relations données dans l'énoncé $U_{n+1} = AU_n$, on pose $U'_n = P^{-1}U_n$, de sorte que $U'_{n+1} = (D - 2I_3)U'_n$ puis $U'_n = \begin{pmatrix} u'_0 \\ (-2)^n v'_0 \\ (-2)^n w'_0 \end{pmatrix}$

On a alors (U_n) bornée si et seulement si (U'_n) bornée, ce qui est équivalent à : $v'_0 = w'_0 = 0$.

Exercice 39 – Le polynôme caractéristique vaut $(X - 2)(X - 4)(X - 6)$. Pour les sous-espaces stables, ceux de dimension 0 et 3 sont assez simples. Ceux de dimension 1 aussi (forcément engendrés par des vecteurs propres). Pour ceux de dimension 2 il faut un peu travailler : si un plan P est stable, alors la restriction de f à P a un polynôme caractéristique qui ne peut pas être n'importe quoi, fournissant des valeurs propres donc des vecteurs propres imposés... finalement il y a 3 tels plans.

Exercice 40 – La matrice A du membre de droite, a pour polynôme caractéristique $\chi_A = (X - 1)(X^2 + 1)$, ce qui permet de la diagonaliser sur $\mathbb{C}$ et d'explicitier n^3 solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$; ce sont les seules par analyse géométrique.

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ c'est beaucoup plus subtil ! On peut commencer par montrer que M est semblable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit donc une rotation d'angle $\pi/2$, ce qui nous fournit déjà n (ou $2n$ si n est pair) solutions (prendre des rotations de bons angles). Pour montrer que ce sont les seules, on peut reprendre les solutions complexes : les seules valeurs propres acceptables (pour que les matrices obtenues soient réelles) sont d'une part 1 (ou -1 si n est pair) puisqu'il y a une valeur propre réelle... et d'autre part des racines n -èmes de $\pm i$ qui sont conjuguées.

Exercice 41 – $\chi_A = X(X - 1)(X - 4)$. Pour le commutant, on géométrise ou pas (commuter avec une diagonale à spectre simple est assez contraignant).

Exercice 42 – Je trouve $\chi_A = (X + 1)(X + a)(X - 1 - a)$. Il reste à discuter...