1 Du calcul matriciel

1. On calcule le rang de A de façon standard, en pivotant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdots]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\cdots]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \leftarrow L_5 - L_3]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et comme le rang d'un matrice est inchangé par opérations élémentaires :

$$\boxed{\text{Le rang de } A \text{ vaut } 3.}$$

2. On sait déjà que le noyau de u est de dimension 2. On le déterminer on résolvant $u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$, que l'on va résoudre matriciellement. Au passage, les opérations effectuées pour rendre le système triangulaire sont les mêmes que lors du calcul du rang, ce qui nous simplifie bien la tâche :

$$u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \iff AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_3 \qquad 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = -\dfrac{1}{3}x_4 - \dfrac{7}{6}x_5 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}\left(-3x_3 - 4x_4 - 2x_5\right) = -\dfrac{4}{3}x_4 + \dfrac{5}{6}x_5 \\ x_3 = -\dfrac{3}{2}x_5 \end{cases}$$

Et donc :

$$\text{Ker}\,(u) = \left\{(-x_4/3 - 7x_5/6, -4x_4/3 + 5x_5/6, -3x_5/2, x_4, x_5) \;\middle|\; x_4, x_5 \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\,(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}),$$

avec $\overrightarrow{g_1} = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}, 0, 1, 0\right)$ et $\overrightarrow{g_2} = \left(-\dfrac{7}{6}, \dfrac{5}{6}, -\dfrac{3}{2}, 0, 1\right)$. La famille $(\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ est clairement libre [1], et donc :

$$\boxed{\text{Une base du noyau de } u \text{ est } (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}).}$$

On aurait également pu pivoter selon les colonnes, en gardant l'information sur les valeurs des colonnes $u(...)$.

3. Notons $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_5})$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. La famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ constitue une base de E (regarder sa matrice dans la base canonique : elle est triangulaire). Ainsi :

$$\boxed{\text{Un supplémentaire du noyau de } u \text{ est Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).}$$

1. Sans cet argument : on connaît la dimension du noyau, grâce au théorème du rang...

4. D'après le cours, on sait que u induit un isomorphisme entre tout supplémentaire du noyau et $\mathrm{Im}\,(u)$. Une base de ce dernier est donc, d'après la question précédente : $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ avec $f_1 = u(\overrightarrow{e_1})$, $f_2 = u(\overrightarrow{e_2})$, et $f_3 = u(\overrightarrow{e_3})$.
Pour la compléter, il manque deux vecteurs... et si on tentait $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$? On aimerait bien que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ soit de rang 5... et bien vérifions !

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \leftarrow 2L_5 - 3L_3]{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \leftarrow 3L_5 - L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right) \text{ est de rang 5, donc constitue une base de } E.}$$

Était-ce un coup de chance que (e_1, e_2) conviennent ? Non pas vraiment, et un dessin devrait vous en convaincre... Et s'ils n'avaient pas convenu ? Alors on aurait pivoté sur (f_1, f_2, f_3) pour obtenir une forme échelonnée (par exemple dans la base canonique) pour pouvoir ensuite compléter facilement.

5. Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de E, $\mathcal{E}_1 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2})$ et $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ (attention à l'ordre des vecteurs !). Par construction des bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}$, on a $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E}_1, \mathcal{F}) = J_3$, de sorte qu'en notant $P_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1}{\mathrm{Pas}}$ et, $Q_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\mathrm{Pas}}$ les matrices de passage respectives de la base $\mathcal{E}$ vers les bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire celles exprimant les nouvelles dans l'ancienne...), notre diagramme préféré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow[A]{u} & \mathcal{E} \\ {\scriptstyle Id_E}\Big\uparrow{\scriptstyle P_1} & & {\scriptstyle Id_E}\Big\downarrow{\scriptstyle Q_1^{-1}} \\ \mathcal{E}_1 & \xrightarrow[J_3]{u} & \mathcal{F} \end{array}$$

et le théorème associé nous assurent : $J_3 = Q_1^{-1} A P_1$. Il reste alors à prendre :

$$Q = P_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1/3 & -7/6 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $P = Q_1^{-1} = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$: on calcule cette matrice en exprimant les vecteurs de la base canonique à l'aide de ceux de $\mathcal{F}$. Pour cela, on part des relations définissant $\mathcal{F}$ à l'aide de $\mathcal{E}$. Et c'est un peu casse-pieds à écrire et infect à typographier... je ne laisse donc que le résultat :

$$P = \underset{\mathcal{F} \to \mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7/9 & -1/18 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/9 & 5/18 & -1/6 \\ 0 & 0 & -2/3 & -1/6 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et là je me dis que je vais bien m'amuser pour corriger les copies...

6. Bien sûr, $P^{-1} = Q_1 = \underset{\mathcal{E} \to \mathcal{F}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \underset{\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}}{\mathrm{Pas}}$ se calcule comme dans la question précédente... mais là je veux bien détailler les calculs (le système n'est pas trop méchant

à résoudre...) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl}
\overrightarrow{e_1} & & & & & = \overrightarrow{e_1}\\
& \overrightarrow{e_2} & & & & = \overrightarrow{e_2}\\
& & \overrightarrow{e_3} & & & = \overrightarrow{e_3}\\
-\frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} & -\frac{4}{3}\overrightarrow{e_2} & & +\overrightarrow{e_4} & & = \overrightarrow{g_1}\\
-\frac{7}{6}\overrightarrow{e_1} & +\frac{5}{6}\overrightarrow{e_2} & -\frac{3}{2}\overrightarrow{e_3} & & +\overrightarrow{e_5} & = \overrightarrow{g_2}
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lccccc}
\overrightarrow{e_1} = & \overrightarrow{e_1} & & & & \\
\overrightarrow{e_2} = & & \overrightarrow{e_2} & & & \\
\overrightarrow{e_3} = & & & \overrightarrow{e_3} & & \\
\overrightarrow{e_4} = & \frac{1}{3}\overrightarrow{e_1} & +\frac{4}{3}\overrightarrow{e_2} & & +\overrightarrow{g_1} & \\
\overrightarrow{e_5} = & \frac{7}{6}\overrightarrow{e_1} & -\frac{5}{6}\overrightarrow{e_2} & +\frac{3}{2}\overrightarrow{e_3} & & +\overrightarrow{g_2}
\end{array}\right.$$

De sorte que

$$Q^{-1} = \underset{\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}}{\mathrm{Pas}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 7/6\\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -5/6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2 Un système linéaire et des probabilités basse tension

1. L'équation $AX = Y$ possède une unique solution si et seulement si A est inversible [2], inversibilité qu'on peut par exemple caractériser par le déterminant (de la matrice !) différent de 0.

$$\boxed{\text{Le système possède une unique solution si et seulement si } b \neq 2a.}$$

Plus élémentairement, ce système est équivalent (après UN tour de pivot) à un système triangulaire dont les coefficients diagonaux sont 1 *et* $2a - b$ *: un tel système possède une unique solution si et seulement si* $2a - b \neq 0$ *(pourquoi ?).*

2. On peut prendre $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ (on ne regarde pas c) muni de la probabilité uniforme (bref : on dénombre). Le couple (a, b) est alors prié de prendre toute valeur sauf $(1, 2)$, $(2, 4)$ et $(3, 6)$, soit $36 - 3$ possibilités.

$$\boxed{\mathbb{P}(S_1) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} = \frac{11\times 18}{6^3} = \frac{198}{6^3}\cdot}$$

3. Le système linéaire possède une infinité de solution si et seulement si la matrice est non inversible et $\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}$ est dans l'image de l'application associée [3], ce qui est équivalent (par exemple) à : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ a & -b & c\end{pmatrix} = 1$. Or, la non inversibilité fournit $b = 2a$, donc on s'intéresse à

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ a & -2a & c\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & c-3a\end{pmatrix}$$

Ce rang vaut 1 si et seulement si $c = 3a$.

$$\boxed{\text{le système possède une infinité de solutions si et seulement si } b = 2a \text{ et } c = 3a.}$$

Sur $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$, les cas favorables sont seulement $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$:

$$\boxed{\mathbb{P}(S_\infty) = \frac{2}{6^3}\cdot}$$

4. Le système ne possède aucune solution si et seulement si la matrice est non-inversible et $\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}$ *n'est pas* dans l'image de l'application associée. D'après la question précédente :

$$\boxed{\text{Le système ne possède pas de solution si et seulement si } b = 2a \text{ et } c \neq 3a.}$$

Les cas favorables sont maintenant $(1, 2, x)$ avec $x \neq 3$, $(2, 4, x)$ avec $x \neq 6$, et aussi les $(3, 6, y)$ avec $y \in [\![1, 6]\!]$; soit $5 + 5 + 6 = 16$ cas favorables :

2. Équivalence que vous devez savoir prouver. Un sens est à peu près évident ; l'autre réclame plus de soin : si A n'est pas inversible, cela signifie quoi sur l'application linéaire canoniquement associée ? Détaillez !

3. Ou encore : « le système est compatible ».

$$\boxed{\mathbb{P}(S_0) = \frac{16}{6^3}.}$$

On vérifie, comme suggéré par l'énoncé, qu'on a bien un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(S_\infty) + \mathbb{P}(S_0) = \frac{198 + 2 + 16}{6^3} = 1.$$

Ouf...

5. Ici, les triplets recherchés sont ceux vérifiant $3a = c$, c'est-à-dire ceux de la forme $(1, x, 3)$ et $(2, x, 6)$: il y en a 2×6.

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{3,0}) = \frac{2 \times 6}{6^6} = \frac{1}{18}.}$$