



Nilpotents, commutants, exponentielle et logarithme de matrices

À rendre le mardi 4 novembre 2025 dernier délai (le lundi 3 dans mon casier, c'est mieux).

Dans tout le problème, le corps des scalaires est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n désigne un entier naturel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E (c'est-à-dire des applications linéaires de E dans E).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On note Id_E l'identité de E . On rappelle que $u^0 = \text{Id}_E$, que $u^1 = u$, que $u^2 = u \circ u$, etc.
- On dit que u est nilpotent s'il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$.
On définit alors son indice (de nilpotence) par

$$\alpha(u) = \text{Min} \{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0\};$$

on a donc $\alpha(u) \geq 1$.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E , on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Étant donné un entier naturel p non nul, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p . On note I_p la matrice identité.

On définit de même que ci-dessus la notion de matrice nilpotente et l'indice d'une matrice nilpotente.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels à une indéterminée.

Dans la suite, le mot *polynôme* désignera toujours un élément de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}.$$

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\mathcal{C} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}_n = (X^k)_{0 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I.

Soient $\Delta \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{cases}$ et $D \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .
3. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ . Expliciter la matrice de Δ_n relativement à la base $\mathcal{C}_n$.
4. L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?
5. L'endomorphisme Δ_n est-il nilpotent ?
6. L'endomorphisme Δ est-il nilpotent ?
7. Donner sans démonstration les résultats analogues pour D .

Partie II.

1. On note A et B les matrices respectives de D_2 et Δ_2 dans la base canonique $\mathcal{C}_2 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, expliciter A^k et B^k .

2. On considère la matrice $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note (E_1) l'équation matricielle $M^2 = J_1$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exhiber deux solutions distinctes de (E_1) .

3. Soit M une solution de (E_1) . On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à M .
Soit $g = f \circ f$.

- (a) Montrer que $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont stables par f .
- (b) Montrer que f admet une unique valeur propre, que l'on précisera.
- (c) En déduire toutes les solutions de (E_1) .

4. On considère la matrice $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note (E_2) l'équation matricielle $M^2 = J_2$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que (E_2) n'admet aucune solution.

Partie III.

Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 3$.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\text{Com}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} \quad \text{et} \quad \text{Pol}(f) = \{P(f) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n .

Soit $u' \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n-1$.

1. Montrer que $\text{Pol}(f)$ et $\text{Com}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$.
Est-ce que ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $\begin{cases} n_{i,j} = 1 \text{ si } j = i+1, \\ n_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, donner une base de $\text{Ker } u^k$.
4. Montrer que $(u^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\text{Pol}(u)$.
5. Soit $w \in \text{Com}(u)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\text{Ker } P(u)$ est stable par w .
6. Montrer que la matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
7. Montrer que $\text{Com}(u) = \text{Pol}(u)$. En déduire la dimension de $\text{Com}(u)$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E telle que la matrice de u' dans $\mathcal{B}'$ soit $N' = (n'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $\begin{cases} n'_{i,j} = 1 \text{ si } j = i+1 \text{ et } j \leq n-1 \\ n'_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
9. Déterminer la dimension de $\text{Com}(u')$.

Partie IV.

Toutes les matrices étudiées dans cette partie sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.

Une matrice U est dite unipotente si $U - I_n$ est nilpotente.

Si A est une matrice nilpotente on note :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{1}$$

$$\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k. \tag{2}$$

1. Exhiber deux matrices nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.
Même question pour le produit.
2. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$).
 - (a) Montrer que AB est nilpotente et que $\alpha(AB) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.
Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
 - (b) Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B) - 1$.
Donner un exemple où cette inégalité est en fait une égalité.
3. Soit A une matrice nilpotente d'indice $r \geq 2$.
 - (a) Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q de même degré d (qu'on exprimera en fonction de r) tels que $\exp(A) = P(A)$ et $\ln(I_n + A) = Q(A)$.
 - (b) Montrer que pour x réel tendant vers 0,

$$Q(P(x) - 1) = x + o(x^d), \quad \text{et} \quad P(Q(x)) = 1 + x + o(x^d).$$
4. Montrer que les relations (1) et (2) permettent de définir deux applications bijectives et réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes.
5. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent ; exprimer $\exp(A + B)$ en fonction de $\exp(A)$ et $\exp(B)$.
6. Soient U et V deux matrices unipotentes qui commutent ; exprimer $\ln(UV)$ en fonction de $\ln(U)$ et $\ln(V)$.
7. Sur quel sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il possible de définir l'exponentielle d'une matrice par la relation (1) ? Dans ce cadre plus général, que dire de $\exp(M_1 + M_2)$, $\exp(M_1)$ et $\exp(M_2)$ si M_1 et M_2 commutent ?