

Réduction

À rendre le mardi 11 novembre 2025 dernier délai (le lundi 10 dans mon casier, c'est mieux).

Ce sujet est composé d'un exercice (faisable en 30-45 minutes) puis d'un problème (faisable en 2H-2H30). Vous pouvez choisir de le faire « en mode DS » : trois heures de travail d'une seule traite, et basta ! Ou « en mode DM » par petits passages. Vous n'êtes pas obligés de tout traiter, mais n'allez pas chercher un corrigé ! Par contre comme d'habitude, n'hésitez pas à en discuter entre vous après avoir cherché individuellement.

En sujet alternatif (plutôt pour 5/2, parce que certaines notions ne seront vues qu'en fin de semaine), un très bon énoncé sur les « racines d'endomorphismes ».

1 Suites simultanément convergentes

- Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} &= -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

- Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n en fonction de α_0 , β_0 , γ_0 et n .
- À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

PROBLÈME 1

Étude de matrices tridiagonales particulières

Présentation générale

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés (diagonalisabilité, valeur du déterminant) de certaines matrices tridiagonales.

Plus précisément, pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère $n - 1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k) , pour k variant de 1 à n , tels que $a_k b_k = -1$ et on s'intéressera alors à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $M_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être traitées séparément.

Notations

- On note $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A et $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à un scalaire λ ;
- on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note I_n la matrice identité d'ordre n ;
- on note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z .

Partie I - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on considère que n est égal à 3 et on pose $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$.

On s'intéresse donc à la matrice M_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q10. Justifier que M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

Q11. Déterminer le rang de $M_3 - I_3$ et en déduire que M_3 admet au moins une valeur propre réelle à préciser.

Q12. Déterminer $\chi_{M_3}(X)$. Ce polynôme est-il scindé dans $\mathbb{R}$?

Q13. Déduire de la question précédente la valeur du déterminant de M_3 .

Q14. Justifier que M_3 admet 3 valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que M_3 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner, sans aucun calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

On note dans la suite λ l'unique valeur propre réelle de M_3 et μ l'unique valeur propre complexe de M_3 dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de M_3 sont λ , μ et $\bar{\mu}$.

Q15. Déterminer une base du sous-espace propre $E_\lambda(M_3)$.

Q16. Déterminer les nombres complexes p tels que :

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}.$$

En déduire une base du sous-espace propre $E_\mu(M_3)$.

Q17. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels, $z \in \mathbb{C}$ et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Montrer que si X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre z , alors le vecteur :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix},$$

est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\bar{z}$.

En déduire une base de $E_{\bar{\mu}}(M_3)$.

Partie II - Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Uniquement dans cette partie, on considère que l'entier naturel n vaut 2. On s'intéresse donc à la matrice M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

où a_1 et b_1 sont deux nombres complexes tels que $a_1 b_1 = -1$.

Q18. Déterminer $\chi_{M_2}(X)$.

Q19. Si on considère a_1 et b_1 réels, la matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

Q20. La matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

Q21. Donner la valeur du déterminant de M_2 .

Objectif de la suite du problème

Dans la **partie III**, nous démontrerons certains résultats liés à la suite de Fibonacci.

Dans la **partie IV**, nous déterminerons la valeur du déterminant des matrices tridiagonales vérifiant les conditions de l'énoncé.

Partie III - La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1, F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q22. Montrer que pour tout entier naturel n , F_n est un entier naturel.

Q23. Résoudre l'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n \geq 0}$. En déduire l'expression de F_n pour tout entier naturel n .

On considère la fonction récursive suivante, prenant en argument un entier naturel n , et renvoyant la valeur de F_n :

```
def Fibo(n):  
    ''' n : entier naturel.  
    Renvoie la valeur de Fn'''  
    if n <= 1:  
        return 1  
    return Fibo(n-1)+Fibo(n-2)
```

Q24. Les trois questions suivantes sont liées à la fonction `Fibo`.

- a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction `Fibo(4)`.
- b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.
- c) Écrire une fonction `FiboV2`, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur du terme F_n . Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que `Fibo`.

Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices M_n pour tout entier naturel $n \geq 1$. On note alors d_n le déterminant de M_n .

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ est définie de la manière suivante : $F_0 = 1, F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q25. Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3 .

Q26. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
On pourra développer d_{n+2} par rapport à la dernière ligne de M_{n+2} .

Q27. En déduire que pour entier naturel $n \geq 1$, $d_n = F_n$.