



Nilpotents, commutants, exponentielle et logarithme de matrices

ISUP 2004 – mathématiques 2

Partie I.

1. Pour changer, la question la plus difficile du problème est la première : qu'est-ce qui était attendu ?
Il s'agit de convaincre le correcteur qu'on sait ce qu'est un endomorphisme :
 - Δ est bien linéaire ($\Delta(\lambda P_1 + \mu P_2) = \dots$) – évitez P et P' !
 - Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\Delta(P)$ appartient également à $\mathbb{R}[X]$.

Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

2. Si P est de degré **inférieur ou égal à** n , alors $P(X+1)$ également (il a le même degré que P), donc $P(X+1) - P(X)$ aussi. Ainsi :

$\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ .

3. Il s'agit d'exprimer, pour chaque $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta(X^j)$ dans la base $\mathcal{C}_n$. Or : $\Delta(1) = 0$, et pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\Delta(X^j) = (X+1)^j - X^j = \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} X^i.$$

La matrice de Δ dans $\mathcal{C}_n$ va donc être un triangle de Pascal amputé de sa diagonale...

$$\text{Mat}(\Delta, \mathcal{C}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & 0 & 2 & & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

4. La matrice précédente étant triangulaire, le spectre de Δ_n se lit sur la diagonale : il est réduit à $\{0\}$. Si Δ_n était diagonalisable, on aurait alors $E = \text{Ker}(\Delta_n)$, donc $\Delta_n = 0$, ce qui se serait vu. On peut également écrire cela matriciellement, en supposant l'existence d'une matrice inversible P telle que $\text{Mat}(\Delta_n, \mathcal{C}) = P \cdot 0 \cdot P^{-1} \dots$

Δ_n n'est pas diagonalisable

5. Matriciellement : « on sait bien » qu'une matrice triangulaire à diagonale nulle est nilpotente. Géométriquement : si P est un polynôme non nul, alors $\Delta(P)$ est de degré strictement plus petit que P . Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta^n(P)$ est de degré strictement négatif, donc $\Delta^n(P) = 0$. Ceci étant valable pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

Δ_n est nilpotent

6. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\Delta^n(X^{n+1})$ est un polynôme constant non nul, donc Δ^n n'est pas l'application nulle. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Δ n'est pas nilpotent

On aura noté que « pour tout P , il existe n tel que $\Delta^n(P) = 0$ », mais « il n'existe pas n tel que pour tout P , $\Delta^n(P) = 0$ ».

7. Tout comme Δ , l'opérateur de dérivation fait décroître strictement le degré des polynômes non nuls, et laisse donc stable les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$. La matrice dans $\mathcal{C}_n$ de sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ est également triangulaire à diagonale nulle.

Les restrictions de D aux $\mathbb{R}_n[X]$ sont nilpotentes non diagonalisables, et D est non nilpotent.

Partie II.

1. D'après ce qui précède :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus :

$$A^0 = B^0 = I_3, A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } A^k = B^k = 0 \text{ pour tout } k \geq 1.$$

2. D'après ce qui précède :

Les matrices $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}B$ sont deux solutions distinctes de (E_1) .

3. (a) Soit $x \in \text{Ker}(g)$. On a alors :

$$g(f(x)) = ((f \circ f) \circ f)(x) = (f \circ (f \circ f))(x) = f(g(x)) = f(0) = 0,$$

donc $f(x) \in \text{Ker}(g)$, et $\text{Ker}(g)$ est donc bien stable par f .

Soit maintenant $y \in \text{Im}(g)$. Il existe alors $x \in E = \mathbb{R}_2[X]$ tel que $y = g(x)$. On a alors :

$$f(y) = f((f \circ f)(x)) = (f \circ f)(f(x)) = g\left(f(x)\right),$$

donc $f(y)$ est bien dans $\text{Im}(g)$. Ainsi :

Le noyau et l'image de g sont stables par f .

- (b) Si λ est valeur propre de f , alors en prenant x un vecteur propre associé (donc non nul), on voit que $g(x) = f(f(x)) = \lambda^2 x$, donc λ^2 est valeur propre de g donc de J_1 , donc $\lambda = 0$ (matrice triangulaire, donc le spectre gnagnagna...) : $\text{Sp}(f) \subset \{0\}$.

Réciproquement, l'image de g est stable par f . L'image de g se lit sur sa matrice dans $\mathcal{C}_2$, à savoir J_1 : il s'agit de $\mathbb{K}_0[X]$. Cette droite étant stable par f , elle nous assure que f possède bien une valeur propre : $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$.

Le spectre de f est réduit à $\{0\}$.

- (c) L'énoncé guide (maladroitement) vers une analyse-synthèse...

— **Analyse** : Si M est une solution de (E_1) , alors son application canoniquement associée f stabilise $\text{Im}(g) = \text{Vect}(1)$ (ce qui impose l'allure de la première colonne) ainsi que $\text{Ker}(g) = \text{Vect}(1, X)$, donc M est triangulaire supérieure. Le spectre de f étant réduit à $\{0\}$, les

valeurs diagonales sont imposées : $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

— **Synthèse** : Réciproquement une matrice de la forme précédente a son carré qui vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } M \text{ est solution si et seulement si } ac = 1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$$

4. L'analyse faite dans la question précédente reste valable : si $f \circ f = g$, alors l'image et le noyau de g sont stables par f . Ainsi, une éventuelle solution de $M^2 = J_2$ aurait sont application linéaire « canoniquement »¹ associée stabilisant à nouveau $\text{Vect}(1)$ et $\text{Vect}(1, X)$ (image et noyau sont inversés par rapport au cas précédent). La matrice M est alors nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais on a vu que le carré d'une telle matrice ne peut valoir J_2 . Ainsi :

L'équation $M^2 = J_2$ n'a pas de solution

Autre point de vue, géométrique : une éventuelle solution de l'équation (E_2) serait un nilpotent (car $J_2^3 = 0$) d'ordre au moins 5 (car $J_2^2 \neq 0$), ce qui est impossible en dimension 3.

Partie III.

1. Voici une solution dont l'efficacité n'égale que la malhonnêteté :
 - $\text{Com}(f)$ est le noyau de l'application linéaire $\Phi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f \in \mathcal{L}(E)$, donc est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.
 - $\text{Pol}(f)$ est l'image de l'application linéaire $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(f) \in \mathcal{L}(E)$, donc est à ce titre un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$.

L'astuce consiste évidemment à ne pas vérifier la linéarité des applications citées. La fainéantise et l'efficacité étant deux qualités appréciées chez le matheux, une telle solution serait certainement validée quel que soit le concours !

2. Hum... ça rappelle vaguement des choses... Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on peut fixer $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. On montre alors comme d'habitude que la famille $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre ; c'est donc une base de E . La matrice de u dans cette base est presque celle recherchée... et il suffit alors de la retourner pour avoir la forme recherchée.

La matrice de u dans $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x_0), \dots, u(x_0), x_0)$ est N .

$$3. \text{ On calcule de façon classique } N^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} : (N^k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit (par résolution de $N^k X = 0$, ou avec une inclusion et la valeur du rang) :

Le noyau de u^k est $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

4. Tout d'abord, on montre sans trop de mal que $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\text{Pol}(u)$... Pour le caractère générateur, on fixe $v \in \text{Pol}(u)$ il existe alors $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $v = P(u)$. On divise euclidiennement : il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = X^n Q + R$, avec R de degré strictement plus petit que n . On a alors

$$v = P(u) = u^n \circ Q(u) + R(u) = R(u) \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}),$$

ce qui prouve le caractère générateur.

$(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\text{Pol}(u)$.

1. Pour reprendre le terme de l'énoncé. Mais usuellement on parle d'application canoniquement associée lorsque l'espace en jeu est $\mathbb{K}^n$; passons...

5. C'est presque une question de cours... Fixons donc $x \in \text{Ker}(P(u))$ et montrons que $w(x) \in \text{Ker}(P(u))$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, w commute avec u^k (récurrence immédiate), puis w commute avec $P(u)$. On a alors :

$$P(u)(w(x)) = (P(u) \circ w)(x) = (w \circ P(u))(x) = w(P(u)(x)) = w(0) = 0.$$

Le noyau de $P(u)$ est stable par w .

6. D'après les questions 3 et 5, les sous-espaces $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ sont stables par w . Si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $w(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$: cela se traduit sur la matrice $W = \text{Mat}(w, \mathcal{B})$ par $W_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$: c'est ce qu'on voulait montrer.

La matrice de w dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure

7. Tout d'abord, u commute avec chaque u^k donc avec tout polynôme en u , donc : $\text{Pol}(u) \subset \text{Com}(u)$. Réciproquement, soit $w \in \text{Com}(u)$. Sa matrice W dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure et commute avec N . Or $(WN)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ w_{i,j+1} & \text{sinon} \end{cases}$ alors que $(NW)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = n \\ w_{i+1,j} & \text{sinon} \end{cases}$

On en déduit que pour $i \leq n-1$ et $j \geq 2$, $w_{i,j+1} = w_{i+1,j}$, ou encore : pour tout $\alpha, \beta \leq n-2$, $w_{\alpha,\beta} = w_{\alpha+1,\beta+1}$. La matrice W est donc de la forme

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_1 \\ (0) & & & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

En prenant $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$, on a alors $W = P(N)$, donc $w = P(u) \in \text{Pol}(u)$, et donc $\text{Com}(u) \subset \text{Pol}(u)$. Comme on connaît une base de ce dernier, la dimension ne fait guère mystère.

$\text{Com}(u) = \text{Pol}(u)$ est de dimension n .

8. Pour des raisons de lisibilité, notons plutôt $v = u'$ ce nilpotent d'indice $n-1$.

Si on a bien en tête les résultats un peu fins sur les noyaux/images itérés, on sait que le noyau de v est de dimension 2 (la suite des dimensions des noyaux de v^k est concave : si $\text{Ker}(v)$ était de dimension 1, alors $\text{Ker}(v^{n-1})$ serait au plus de dimension $n-1$, ce qui est absurde). Il resterait alors à construire une base de $\text{Ker}(v^{n-2})$ de la façon usuelle (qui va suivre) et compléter avec un vecteur du noyau non colinéaire avec celui dont on dispose déjà...

Mais ce résultat n'étant peut-être pas considéré comme basique (...), on va procéder autrement, en commençant par fixer x_0 tel que $v^{n-2}(x_0) \neq 0$. La famille $(x_0, \dots, v^{n-2}(x_0))$ est alors libre (enfin, il me semble...). On définit alors $e'_k = v^{n-1-k}(x_0)$, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et on complète la famille libre $(e'_1, \dots, e'_n)$ en une base de E à l'aide d'un vecteur f . La matrice de v dans cette

base est alors $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \alpha_{n-2} \\ (0) & & & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ Comme v n'a que 0 comme valeur propre, on a

$\alpha_n = 0$. Ensuite, $u^{n-1}(f) = u^{n-2}(u(f)) = \alpha_{n-1}e'_1 = 0$, donc $\alpha_{n-1} = 0$.

Prenons maintenant $e'_n = f - (\alpha_1 e'_2 + \cdots + \alpha_{n-2} e'_{n-1})$, de sorte que $e'_n \in \text{Ker}(v)$: la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est alors une base de E (on a seulement transvecté sur une base!), et :

La matrice de u' dans $\mathcal{B}$ est celle demandée.

9. Bien entendu, il y a un isomorphisme entre l'espace des endomorphismes commutant avec u' est l'espace des matrices commutant avec N' : c'est ce dernier espace qu'on va déterminer. En raisonnant par bloc, on voit que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ L & \alpha \end{pmatrix}$ (avec $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, C une matrice colonne et

L une matrice ligne) commute avec $N' = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $AN_0 = N_0A$, $NC = 0$ et

$LN = 0$. La première condition impose la forme de A (question 7) ; la seconde impose $C = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

et la dernière impose $L = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mu)$. Ces conditions nécessaires sont également suffisantes pour avoir $MN' = N'M$. Les matrices commutant avec N' sont donc celles de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda \\ & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ & (0) & \ddots & \lambda_1 & \vdots \\ & & & \lambda_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu & \alpha \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$\boxed{\text{Com}(u') \text{ est de dimension } (n-1) + 3 = n+2}$$

Partie IV.

1. Pas besoin d'aller chercher bien loin :

$$\boxed{\text{Les matrices } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont nilpotentes, mais pas leur somme } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le produit, ce n'est guère plus compliqué :

$$\boxed{\text{Les matrices } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont nilpotentes, mais pas leur produit } AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Notons $p = \alpha(A)$, $q = \alpha(B)$, et supposons : $p \leq q$. On a alors : $(AB)^p = (AB)(AB)\dots(AB) = A^p B^p$ (car A et B commutent), or $A^p = 0$, donc $(AB)^p = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } AB \text{ est nilpotente d'indice majoré par } p = \text{Min}(\alpha(A), \alpha(B))}$$

Formellement, la matrice nulle est nilpotente d'indice 1, et donc :

$$\boxed{\text{En prenant } A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } \alpha(A) = \alpha(B) = 2 \text{ et } \alpha(AB) = 1 < \text{Min}(\alpha(A), \alpha(B))}$$

- (b) Notons $p = \alpha(A)$ et $q = \alpha(B)$. Puisque A et B commutent, on peut binômiser :

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geq p$ alors $A^k = 0$. Pour $k \leq p-1$, on a cette fois $p+q-1-k \geq q$ donc $B^{p+q-1-k} = 0$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls, donc $(A+B)^{p+q-1} = 0$, donc :

$$\boxed{A+B \text{ est nilpotente d'ordre majoré par } \alpha(A) + \alpha(B) - 1}$$

Si on prend $A = B = 0$, on a bien A et B nilpotentes qui commutent, avec la somme nilpotente d'ordre $1 = 1 + 1 - 1$.

3. (a) Pour tout $k \geq r$, $A^k = 0$, donc dans les deux définitions « séries » de $\exp(A)$ et $\ln(I_n + A)$, les termes au delà de $k = r$ sont nuls :

$$\boxed{\text{En prenant } P = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{X^k}{k!} \text{ et } Q = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k, \text{ on a } \exp(A) = P(A) \text{ et } \ln(I_n + A) = Q(A)}$$

On note pour la suite que $d = r - 1$.

- (b) On reconnaît les développements limités des fonctions exponentielle et logarithme aux voisinages de 0 et 1 : $e^t = P(t) + o(t^d)$ et $\ln(1+u) = Q(u) + o(u^d)$. On va les composer...
 — D'une part, $e^{\ln(1+u)} = 1+u$;
 — d'autre part, $\ln(1+u) \sim u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$, donc

$$\begin{aligned} e^{\ln(1+u)} &= P(\ln(1+u)) + o(\ln(1+u)^d) = P(Q(u) + o(u^d)) + o(u^d) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^d \frac{1}{k!} \underbrace{(Q(u) + o(u^d))^k}_{Q(u)^k + o(u^d)} = P(Q(u)) + o(u^d) \end{aligned}$$

On a donc comme annoncé :

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, } P(Q(u)) = 1 + u + o(u^d)}$$

La seconde relation se prouve de la même façon.

4. Lorsqu'un polynôme R vérifie $R(t) = o(X^d)$ au voisinage de 0, alors sa valuation vaut au moins $d+1$; il existe un polynôme R_1 tel que $R = X^{d+1}R_1$. Avec les notations de la question précédente, on a donc : $\exp(\ln(I_n + A)) = P(Q(A)) = I_n + A + A^r R_1(A)$, avec $R_1 \in \mathbb{R}[X]$. Mais comme $A^r = 0$, on obtient $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$. Ainsi, lorsque U est unipotente, $\exp(\ln(U)) = U$, donc $\exp \circ \ln = \text{Id}_{\mathcal{U}}$ (avec $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices unipotentes).

De même, $\ln \circ \exp = \text{Id}_{\mathcal{N}}$, avec $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes.

$$\boxed{\text{Les fonctions } \ln \text{ et } \exp \text{ induisent donc deux bijections réciproques entre } \mathcal{U} \text{ et } \mathcal{N}.$$

Au fait : sauriez-vous encore (...) montrer que si f et g sont des applications de E (respectivement F) dans F (respectivement E) vérifiant $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$, alors f et g sont bijectives (injective et surjectives) ?

5. On peut invoquer un résultat général bien connu sur les exponentielles de matrices qui commutent... mais l'esprit de l'énoncé me semble être de le reprouver. Soient donc A et B deux matrices qui commutent. Dans le produit $\exp(A)\exp(B)$, on va regrouper les termes $A^i B^j$ à somme $s = i + j$ constante :

$$\exp(A)\exp(B) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{B^j}{j!} \right) = \sum_{s=0}^{2n-2} \underbrace{\sum_{i=0}^s \frac{A^i}{i!} \frac{B^{s-i}}{(s-i)!}}_{\frac{1}{s!} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} A^i B^{s-i}} = \sum_{s=0}^{2n-2} \frac{1}{s!} (A+B)^s = \exp(A+B)$$

(on a binômisé, ce qui était licite puisque A et B commutent).

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices nilpotentes qui commutent, alors } \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)}$$

6. Supposons que U et V commutent. Les matrices $\ln(U)$ et $\ln(V)$ commutent alors également, puisque ce sont des polynômes en U et V . On peut alors utiliser ce qui précède :

$$\exp(\ln(U) + \ln(V)) = \exp(\ln(U))\exp(\ln(V)) = UV = \exp(\ln(UV)),$$

donc *par injectivité* de la fonctions $\exp$, on en déduit :

$$\boxed{\text{Si } U \text{ et } V \text{ sont deux matrices unipotentes qui commutent, alors } \ln(UV) = \ln(U) + \ln(V)}$$

7. C'est dans le cours, entre les séries, la réduction et la topologie ! Si on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme, alors la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente, ce qui permet de définir l'exponentielle de toute matrice réelle (ou complexe, d'ailleurs). En travaillant dans l'esprit de la question 5 (en contrôlant les restes : il ne s'agit plus de polynômes), on prouve de même que si A et B sont deux matrices qui commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Si $\|A\| < 1$, la série définissant $\ln(I+A)$ est également convergente. Comme on peut raisonnablement l'espérer, $\exp$ et $\ln$ sont alors **localement** des bijections réciproques.