Réduction

Le corrigé du problème a été rédigé par Olivier Omnès (pour le premier exercice, tous les corrigés que j'ai trouvé me font grincer les dents, donc je m'y suis finalement collé).

1 Suites simultanément convergentes

1. On peut commencer par calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$, mais pas forcément en bricolant via des apparitions de zéros un peu aléatoires... Je pivote sur le 1 en bas à gauche, via les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - (X+4)L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3$, le gros calcul étant : $2 - (X+3)(X+4) = -10 - 7X - X^2$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & X+2 & -10-7X-X^2 \\ 0 & X+2 & -6X-12X \\ 1 & \star & \star \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} 1 & -10-7X-X^2 \\ 1 & 6-6X-12 \end{vmatrix}$$
$$= (X+2)\left(X^2+X-2\right) = (X+2)^2(X-1)$$

On obtient donc déjà :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1\}}$$

Il reste à montrer que la somme des deux sous-espaces propres vaut $\mathbb{R}^3$. Or : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}\,(A+2I_3)$ si et seulement si $x - y + z = 0$, donc $\mathrm{Ker}\,(A+2I_3)$ est un hyperplan qui contient $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc (f_1, f_2) en constitue une base (bon cardinal, et libre). De même $\mathrm{Ker}\,(A - I_3) = \mathrm{Vect}(f_3)$ avec $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalement la somme directe des deux sous-espaces propres est de dimension 3, donc A est diagonalisable. De plus, si on note P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ vers la base de vecteurs propre $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ (constituée en recollant les bases de deux sous-espaces supplémentaires), alors la matrice de u (canoniquement associé à A) dans la base $\mathcal{F}$ est diagonale. Bref :

$$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D}$$

2. On a bien entendu, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = (P^{-1}A)X_n = (DP^{-1})X_n = D(P^{-1}X_n) = DY_n,$$

puis par récurrence immédiate, on a $Y_n = D^nY_0$ pour tout entier n. Les puissances d'une matrice diagonale étant connues, on en déduit :

$$\boxed{Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n\beta_0 \\ (-2)^n\gamma_0 \end{pmatrix}}$$

La relation $X_n = PY_n$ nous dit (la matrice P étant fixe) que si les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors il en est de même pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais la relation $Y_n = P^{-1}X_n$ nous dit que la réciproque est vraie !

Bref : les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent si et seulement si les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Mais ceci est équivalent au fait que $\beta_0 = \gamma_0 = 0$. Il reste à déterminer ces valeurs en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Puisque $X_0 = PY_0$, on peut résoudre ce système pour trouver comme conditions $2u_0 - v_0 + 2w_0 = 0$ et $-u_0 + v_0 - 4w_0 = 0$... mais avecun peu de géométrie c'est plus simple : dire que $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ c'est dire que si on note $\overrightarrow{x_0}$ le vecteur de coordonnées X_0 dans $\mathcal{E}$ et donc Y_0 dans $\mathcal{F}$, alors $\overrightarrow{x_0}$ est colinéaire à f_1 !

Dans ce cas (convergence des trois suites) la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et il en va de même pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } X_0 \in \operatorname{Ker}(A - I), \text{ et on a alors } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ constante.}}$$

PROBLÈME 1

Partie I

Q10. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien une matrice tridiagonale ; de plus $a_1 = -1$ et $b_1 = 1$ donc $a_1 b_1 = -1$; de même, $a_2 = -1$ et $b_2 = 1$, donc $a_2 b_2 = -1$ et M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

Q11. $\mathrm{rg}\big(M_3 - I_3\big) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc $\boxed{\mathrm{rg}\big(M_3 - I_3\big) = 2}$

D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim\big(\mathrm{Ker}(M_3 - I_3)\big) = 1$; donc il existe un vecteur non nul $U \in \mathrm{Ker}(M_3 - I_3)$; c'est-à-dire qu'il existe un vecteur non nul U tel que $M_3 U = U$ et donc que

$$\boxed{M_3 \text{ admet la valeur 1 comme valeur propre réelle.}}$$

Q12. $\chi_{M_3}(X) = \det(XI_3 - M_3) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ X-1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$

$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\big((X-1)^2 + 2\big)$; donc $\boxed{\chi_{M_3}(X) = (X-1)(X^2 - 2X + 3)}$

Le discriminant du polynôme $X^2 - 2X + 3$ vaut -8, donc $\boxed{\chi_{M_3}(X) \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}}$

Q13. $\chi_{M_3}(0) = \det(-M_3) = (-1)^3 \det(M_3) = -\det(M_3)$; donc $\boxed{\det(M_3) = 3}$

Q14. Le polynôme $X^2 - 2X + 3$ possède deux racines complexes conjuguées (donc distinctes).

Les valeurs propres de M_3 étant les racines de $\chi_{M_3}(X)$, on peut dire que M_3 possède trois valeurs propres complexes distinctes, dont une réelle (la valeur 1) et les deux autres conjuguées. (On peut montrer que ces dernières valeurs sont $1 \pm i\sqrt{2}$).

Le polynôme caractéristique de M_3 est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ ce qui prouve que

$$\boxed{M_3 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, donc

$$\boxed{\text{chaque sous-espace propre est de dimension 1}}$$

Q15. On reprend le calcul effectué en **Q11** : $E_\lambda = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; donc $\boxed{E_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

Q16. $M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2})\begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2})\begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} p + i\sqrt{2} & = & p + ip\sqrt{2} \\ -p + i\sqrt{2} - p & = & i\sqrt{2} - 2 \\ -i\sqrt{2} - p & = & -p - ip\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{p = 1}$ On en déduit que la valeur $1 + i\sqrt{2}$ est valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{E_\mu = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

Q17. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre z, alors $NX = zX$; soit

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = zx_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = zx_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = zx_3 \end{cases}$

par les propriétés de la conjugaison, il vient :

$$\begin{cases} \overline{a_{11}}\,\overline{x_1} + \overline{a_{12}}\,\overline{x_2} + \overline{a_{13}}\,\overline{x_3} = \overline{z}\,\overline{x_1} \\ \overline{a_{21}}\,\overline{x_1} + \overline{a_{22}}\,\overline{x_2} + \overline{a_{23}}\,\overline{x_3} = \overline{z}\,\overline{x_2} \\ \overline{a_{31}}\,\overline{x_1} + \overline{a_{32}}\,\overline{x_2} + \overline{a_{33}}\,\overline{x_3} = \overline{z}\,\overline{x_3} \end{cases}$$

or N est une matrice à cœfficients réels, donc on a :

$$\begin{cases} a_{11}\,\overline{x_1} + a_{12}\,\overline{x_2} + a_{13}\,\overline{x_3} = \overline{z}\,\overline{x_1} \\ a_{21}\,\overline{x_1} + a_{22}\,\overline{x_2} + a_{23}\,\overline{x_3} = \overline{z}\,\overline{x_2} \\ a_{31}\,\overline{x_1} + a_{32}\,\overline{x_2} + a_{33}\,\overline{x_3} = \overline{z}\,\overline{x_3} \end{cases}$$

Donc on a $N\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$; ce qui montre bien que $\overline{X}$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre $\overline{z}$.

On peut donc en déduire : $\boxed{E_{\overline{\mu}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$

Partie II

Q18. $\chi_{M_2}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -b_1 \\ -a_1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - a_1b_1 = (X-1)^2 + 1 = \boxed{(X-1-i)(X-1+i)}$

Q19. a_1 et b_1 étant des réels vérifiant $a_1b_1 = -1$, le calcul précédent montre que $\chi_{M_2}(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc que $\boxed{M_2 \text{ est ni diagonalisable, ni trigonalisable sur } \mathbb{R}.}$

Q20. Le polynôme caractéristique de M_2 est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc $\boxed{M_2 \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

Q21. $\chi_{M_2}(0) = \det(-M_2) = (-1)^2\det(M_2)$; donc $\boxed{\det(M_2) = 2}$

Partie III

Q22. Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est un entier naturel.

- *Initialisation :* $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- *Hérédité :* On suppose que la propriété est vérifiée par F_n et F_{n+1}.
  Par définition, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donc, par hypothèse de récurrence, F_{n+2} est la somme de deux entiers naturels ; ainsi F_{n+2} est bien un entier naturel ; ce qui établit l'hérédité.
- *Conclusion :* On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \text{ est un entier naturel.}}$

Q23. L'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est $r^2 - r - 1 = 0$, dont le discriminant vaut 5 et les racines sont $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; par théorème, il existe deux réels λ et μ tels que

$$F_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

F_0 et F_1 donnent : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ (1+\sqrt{5})\lambda + (1-\sqrt{5})\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \sqrt{5}\lambda - \sqrt{5}\mu = 1 \end{cases}$

On obtient : $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ et $\mu = \dfrac{-\sqrt{5}+1}{-2\sqrt{5}} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$; donc :

$$\boxed{F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Q24. a)

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathrm{Fibo}(4) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & & \mathrm{Fibo}(3) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \mathrm{Fibo}(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \mathrm{Fibo}(2) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{Fibo}(1) & & \mathrm{Fibo}(1) & & \mathrm{Fibo}(0) \\
\mathrm{Fibo}(1) & & \mathrm{Fibo}(0) & & & & &
\end{tikzcd}$$

b) Si on note F_n le nombre d'appels récursifs de Fibo(n), alors on a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et la **Q23** montre que la complexité de cette fonction est exponentielle.

c) On demande une version non récursive de meilleure complexité (linéaire ici) :

```
def FiboV2(n):
    a,b = 1,1
    for k in range(n):
        a,b = b,a+b
    return a
```

On aurait pu programmer une fonction récursive en version terminale (donc de complexité linéaire) de la manière suivante :

```
def FiboV3(n,a=1,b=1):
    if n==0:
        return a
    return FiboV3(n-1,b,a+b)
```

Q25. $d_1 = |1| = \boxed{1}$; $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{2}$ et $d_3 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 \\ 0 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_1b_1 - a_2b_2 = \boxed{3}$

Q26. On a

$$d_{n+2} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = -a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{n+1}b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \text{; or } a_{n+1}b_{n+1} = -1 \text{ donc :}$$

$$\boxed{d_{n+2} = d_{n+1} + d_n}$$

Q27. On a $d_1 = F_1 = 1$; $d_2 = F_2 = 2$ de plus $(d_n)_{n\geqslant 1}$ et $(F_n)_{n\geqslant 1}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2, donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ d_n = F_n}$