



À rendre le jeudi 27 novembre 2025 dernier délai.

Ce DM est constitué d'un petit problème de réduction, un exercice sur une série de fonctions, et enfin un exercice assez élémentaire dont l'objectif est de vous préparer aux séries entières en acquérant de sains réflexes.

À la place, vous pouvez décider de faire, au moins en partie, le DM 7 bis (sensiblement plus difficile) mais les 3/2 faisant ce choix devront absolument faire le troisième exercice de ce sujet « DM 7 » en préambule.

1 Racine cubique d'une matrice

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A .

1.1 Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A .

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D .
3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D . Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D , puis l'ensemble des racines cubiques de A . On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ .

1.2 Dans un plan euclidien (optionnel pour les 3/2)

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

5. Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M ?
6. En déduire une racine cubique de la matrice M .
7. Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1. Montrer que N admet une racine cubique.

1.3 Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A .

1.3.1 Existence d'une racine cubique polynomiale

8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

9. Dédurre de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

1.3.2 Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d (X^3 - \lambda_k)$$

10. Montrer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont non nuls.
11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.
12. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
13. Dédurre des questions précédentes que si B est une racine cubique de A , alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Une série de fonctions

On définit, pour $n \geq 2$ et $x > 0$: $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$.

On note S la somme de cette série, définie donc sur D .

2. A-t-on convergence normale de $\sum u_n$ sur D ? Sinon (!), donner des intervalles « le plus grand possible » sur lesquels il y a convergence normale.
3. Montrer que pour tout $x \in D$ et tout $n \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que S est continue sur D .
5. (Pour 5/2) La fonction S est-elle intégrable sur D ?

3 Préparation aux séries entières

1. Pour quels $r \geq 0$ ces suites sont-elles bornées ?

$$(r^n)_n \quad (nr^n)_n \quad \left(\frac{r^n}{n}\right)_n \quad \left(\frac{2^n r^n}{n^3}\right)_n \quad \left(\frac{n^3 3^n r^n}{\ln^5 n}\right)_n$$

2. Pour quels $r \geq 0$ ces suites sont-elles convergentes ?

$$(r^n)_n \quad (nr^n)_n \quad \left(\frac{r^n}{n}\right)_n \quad \left(\frac{2^n r^n}{n^3}\right)_n \quad \left(\frac{n^3 3^n r^n}{\ln^5 n}\right)_n$$

3. Pour quels $r \geq 0$ ces séries sont-elles convergentes ?

$$\sum_n r^n \quad \sum_n nr^n \quad \sum_n \frac{r^n}{n} \quad \sum_n \frac{2^n r^n}{n^3} \quad \sum_n \frac{n^3 3^n r^n}{\ln^5 n}$$

On résumera les réponses dans le tableau suivant, et on mettra sur la copie un certain nombre de justifications.

a_n	$(a_n r^n)_n$ bornée	$(a_n r^n)_n$ convergente	$\sum a_n r^n$ convergente
1			
n	$[0, 1[$		
$1/n$			
$2^n/n^3$			
$n^3 3^n / \ln^5 n$			

Par exemple pour la case déjà remplie :

Si $r \geq 1$ alors $nr^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $(nr^n)_n$ n'est pas bornée alors que si $r < 1$ par croissances comparées on a $nr^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc (nr^n) est bornée.