



À rendre le lundi 15 décembre 2025 dans mon casier.

Au choix : le petit problème proposé ici, ou bien le sujet complet (long et difficile) « DM 8 bis ». Je donne ce sujet bis... mais je pense que tout le monde peut rédiger plutôt le sujet « normal » : soyez raisonnables !

1 Convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Cette façon de réécrire S_n s'appelle la transformation d'Abel.

2. On suppose que (B_n) est bornée et que (a_n) est décroissante de limite nulle.
- Démontrer que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.
 - En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.
 - En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème de convergence des séries alternées, **après l'avoir énoncé**.
3. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Calculer pour n entier naturel, $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.
 - Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent.

On notera U sa fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

2 Convergence uniforme de séries

1. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n , $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

On suppose que (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (la suite (F_n) est dite uniformément bornée)

- (a) Démontrer que la suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .
 - (b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .
2. Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
 - (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.
 - (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
 - (c) En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.
 - (d) On fixe $p \in \mathbb{N}$, et on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx) \sin(px)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.
On pourra, par exemple, utiliser¹ :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin \frac{x}{2}.$$

3 Convergence uniforme d'une série entière

1. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série de fonctions.
2. On considère la série de la variable complexe $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.
 - (a) Justifier le fait que cette série entière a pour rayon de convergence 1.
 - (b) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$
(en particulier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).
 - (c) Pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note D_α l'ensemble des complexes z , tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\operatorname{Re}(z) \leq \cos \alpha$.
Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.
On confondra évidemment un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
 - (d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$.
Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n , si $x = \operatorname{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos \alpha}.$$

1. Une petite prime sera généreusement offerte à ceux justifiant cette inégalité, cette prime sera augmentée si la preuve est accompagnée d'un dessin pertinent...

- (e) Démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur toutes les parties D_α (pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

4 Le debrief...

Quelques remarques signalées après avoir corrigé les copies...

- Majorations de complexes!!!
- $|S_n| \leq \dots$ donc (S_n) est convergente...
- (nimpe) donc (S_n) est convergente...
- « passages à la limite » sans savoir qu'elles existent.
- Pitié, pas de récurrence.
- Savoir enfin sommer les suites géométriques...
- Que vaut $e^{i\theta}$?
- Bravo pour l'uniforme convergence sur ...