



Suites et séries de fonctions

1 Modes de convergence

Exercice 1 – Mines 2022 [6/10]

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0, 1[$ telle que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. On définit par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$: $P_n = X^n - X^{n+1}$.

1. Donner un exemple de suite (t_n) telle que (t_n) ne converge pas vers 0.
2. Montrer que (la suite de fonctions polynomiales associées à) (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. Montrer que $P_n(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
4. En partant de la relation

$$x^n - x^{n+1} = x^n \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k},$$

montrer d'une deuxième façon que $P_n(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 2 – TPE 2017 [5/10]

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$f_n : t \mapsto n \cos t \sin^n t.$$

Étudier la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, \pi/2]$.

Exercice 3 – TPE 2017 (deux fois) [3/10]

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. A-t-on convergence uniforme ?
3. Prouver la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, lorsque $a > 0$.

Exercice 4 – CCINP 2009 [2/10]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = ne^{-n^2 x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer la convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5 – [3/10]

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On définit sur $\mathbb{R}^+$: $f_n(x) = f(x/n)$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 6 – [8/10]

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_*^+)$. On définit sur $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right)^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 7 – [8/10]

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}.$$

Étudier la convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 8 – Convergence des fonctions convexes [9/10]

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions convexes convergeant simplement vers f sur un intervalle I .

1. Montrer que f est convexe.
2. On suppose que I est un segment. La convergence des (f_n) est-elle uniforme sur I ?
3. Montrer que si S est un segment contenu dans l'intérieur de I , alors les f_n sont équilipschitziennes sur S .
4. En déduire que (f_n) converge uniformément sur S .

Exercice 9 – [5/10]

Étudier la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{si } x \text{ est un entier pair} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

2 Régularité des sommes de séries de fonctions

Exercice 10 – CCP 2017 [6/10]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\int_0^1 f_n(t) dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sum f_n(x)$ converge. On note $S(x)$ la somme de cette série.
4. Exprimer, pour $x > 0$, $S(1/x)$ en fonction de $S(x)$.
5. Étudier la continuité de S sur $[0, +\infty[$.
6. Préciser la limite de S en $+\infty$.

Exercice 11 – IMT 2017 [6/10]

On s'intéresse à $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S .
2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que $\sum f'_n$ converge uniformément.
4. Montrer que S est monotone sur son ensemble de définition.
5. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 12 – CCP 2017 [8/10]

Soient $a > 0$ et $I = [-a, a]$. On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est telle qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leq C|x|$.

On s'intéresse alors à l'ensemble E des fonctions f telles que $f(0) = 0$, et $f(x) - f(x/2) = \varphi(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que l'application $\Phi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie, puis continue, puis appartient à E .
2. Que dire de la différence de deux éléments de E ?
3. En déduire E .
4. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que Φ est dérivable.

Questions bonus :

1. Si φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, que dire de Φ ?
2. Montrer que la continuité sur I et la dérivabilité en 0 imposent l'existence de C telle que pour tout $x \in I$, $|\varphi(x)| \leq C|x|$.

Exercice 13 – Mines 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021... [6/10]

1. Déterminer le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
3. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 14 – $\mathcal{C}^\infty$ [6/10]

Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'en posant, pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^\alpha x}$, on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Des indications

Exercice 1 – J'imagine que $t_n = 1 - 1/n$ fait le job. Ensuite, $|P_n|$ est maximale en $n/(n+1)$ et y vaut $O(1/n)$; puis : $|P_n(t_n)| \leq \|P_n\|_\infty$. La minoration $\sum_{k=0}^{\infty} t_n^k \geq \sum_{k=0}^n t_n^k \geq (n+1)t_n^n$ doit permettre de conclure.

Exercice 2 – Il y a convergence simple vers la fonction nulle. Je pense que la tête de f_n invite à considérer $\int_0^{\pi/2} f_n$, qui vaut $\frac{n}{n+1}$, donc ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$... ce qui devrait être le cas si la convergence était uniforme.

Exercice 3 – f_n est maximale en $1/n$, où elle vaut $1/2$...

Exercice 4 – On a $\|f\|_{\infty, [a, +\infty[} = f_n(a)$, et $\|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[} = n$ par continuité de f_n en 0.

Exercice 5 – Convergence simple vers $f(0)$, uniforme sur $[-A, A]$ par continuité en 0, mais pas sur $\mathbb{R}$ (prendre f non bornée par exemple).

Exercice 6 – Tout est fonction de la position de $f(0)$ vis-à-vis de 1 en première approximation :

- si $f(0) < 1$, il y a convergence simple vers 0 (uniforme sur $[-A, A]$ mais pas $\mathbb{R}$) ;
- si $f(0) > 1$, il y a « divergence simple » !
- si $f(0) = 1$, différents scénarios peuvent se produire : regarder $f(x) = 1 - x$, $f(x) = 1 - x^2$, $f(x) = 1 - x^3$...

Exercice 7 – Il y a convergence simple vers $|f|$. L'inégalité des accroissements finis nous dit que si $A \geq M$ et $B > 0$, alors $|\sqrt{A+B} - \sqrt{A}| \leq \frac{1}{2\sqrt{M}}B$. Ceci assure la convergence uniforme « là où f ne s'approche pas trop de 0 ». Il reste à epsiloniser pour prouver la convergence uniforme partout...

Exercice 8 – Passage d'inégalités à la limite ; penser à $x \mapsto x^n$. Contrôler les pentes dans S par des pentes prises à l'extérieur de S ... et finir en ε !

Exercice 9 – Convergence simple vers la fonction nulle. Uniforme sur toute partie bornée et non uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 – Sauf erreur, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2} \dots$

Exercice 11 – Une vague connaissance des séries alternées aidera le candidat. Pour le dernier point, il me semble que le théorème de double-limite s'applique (convergence uniforme...).

Exercice 12 – Les convergences me semblent normales, grâce à la condition sur φ . Pour prouver cette condition sur φ lorsque cette fonction est dérivable en 0, on note que le rapport $\frac{\varphi(x)}{x}$ possède une limite finie en 0 et est continu sur $]0, a]$, donc (petite epsilonisation) est borné sur $]0, a]$ (et aussi bien entendu sur $[-a, 0[$).

Exercice 13 – La convergence des séries dérivées est normale sur $[a, +\infty[$, d'où le caractère $\mathcal{C}^\infty$. Au voisinage de 0, une comparaison somme/intégrale fournit comme équivalent : $\frac{2}{x^2}$. Au fait :

```
> int(exp(-sqrt(u)),u=0..infinity);
```

2

Et en $+\infty$? Prolongez l'exercice...

Exercice 14 – C'est essentiellement la même chose que le cas $\alpha = 1/2$ traité en cours!