



Séries entières

1 Rayons de convergence

On retiendra qu'il y a autre chose que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour calculer des rayons de convergence : très souvent, il est préférable de penser les choses en termes de « pour quels r la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ? »

Exercice 1 – Mines 2016 [5/10]

Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des $r \geq 0$ tels que $\left(\sum_{k=0}^n a_k r^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 2 – Centrale 2010 [2/10]

On définit, pour $n \geq 2$, $a_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$.

Exercice 3 – Des rayons ; stage 1

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec a_n défini des façons suivantes :

1. $a_n = \frac{n^n}{n!}$;
2. $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$;
3. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$ puis $a_n = \sqrt{n}^{-\sqrt{n}}$;
4. $a_n = e^{\sqrt{n}}$ puis $a_n = e^{-\sqrt{n}}$;
5. $a_n = \left(\cosh \frac{1}{n} \right)^{n^\alpha}$;
6. $a_n = 999\sqrt{n}$.

Exercice 4 – Des rayons ; stage 2

Same player shoot again.

1. $a_{2n} = 971^n$ et $a_{2n+1} = 999^n$;
2. $a_n = \begin{cases} (\sqrt{n})! & \text{si } n \text{ est un carré d'entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $a_n = \begin{cases} 945^p & \text{si } n = p! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 – Gapembert [5/10]

On suppose : $\frac{a_{n+2}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 6 – a_n^2 , $\frac{a_n}{n!}$ et $n!a_n$ [6/20]

On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Que dire de celui de $\sum a_n^2 z^n$? et de celui de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$? Et enfin de celui de $\sum n! a_n z^n$?

2 Calculs de somme

Exercice 7 – Mines 2016 (deux fois) [4/10]

Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$.

Exercice 8 – Centrale 2016 [5/10]

Pour un réel $a = d_0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$, on note d_n la n -ème décimale de a .

1. Donner le rayon de convergence de $\sum d_n x^n$ (on pourra discuter selon la valeur de a).
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{1}{10^n}$?

Exercice 9 – Mines-Télécom 2016 [2/10]

Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière $\sum (n^2 + n + 1)x^n$

Exercice 10 – $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ [8/10]

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Établir une équation différentielle du quatrième ordre vérifiée par f , et la transformer en une équation du deuxième ordre en considérant $f'' + f$.
3. Trouver la valeur de $f(x)$.

Exercice 11 – Mines 2009 [9/10]

Calcul de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} x^n.$$

Exercice 12 – Encore des sommes [8/10]

Calculer les sommes suivantes (en donnant les rayons de convergence) :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$;
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.

Exercice 13 – Harmonique [5/10]

Calculer, pour des x à préciser : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Exercice 14 – CCP 2010

Montrer que pour tout $t \in [-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.

Exercice 15 – DES, dérivation... [6/10]

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + 3n + 2)(2n)!}$.

3 Des développements en série entière

Exercice 16 – Mines 2017 [6/10]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \frac{(\operatorname{sh} \alpha)x}{x^2 - 2(\operatorname{ch} \alpha)x + 1}.$$

Exercice 17 – Arccos [2/10]

Développer la fonction Arccos en série entière.

Exercice 18 – TPE 2009 [6/10]

Soit $f : x \in [-1, 1] \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$.
2. Montrer par deux méthodes que f est développable en série entière autour de 0.

Exercice 19 – Mines 2010 [8/10]

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n^2 x) e^{-n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. En minorant $|f^{(2p)}(0)|$ pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 20 – Des développements en série entière

Développer en série entière (en précisant le domaine de validité du développement) les « fonctions » suivantes :

1. $\ln(x^2 - 5x + 6)$.
2. $e^x \sin x$;
3. $\ln(1 + x + x^2)$ (attention : $1 + x + x^2 = \dots$) ;
4. $\frac{1}{1 + x - 2x^3}$;
5. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (il y a peut-être un produit de Cauchy qui rôde...).
6. $\left(\frac{(1+x)\sin x}{x} \right)^2$;
7. $\frac{x}{1-x-x^2}$: par décomposition en éléments simples, puis en utilisant la relation $(1-x-x^2)f(x)x$.

Exercice 21 – Des développements en série entière, stage 2

Idem (dériver au moins partiellement peut-être une bonne idée) :

1. $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;
2. $\operatorname{Arctan}(x + 1)$;
3. $\int_0^x \frac{\ln(t^2 - \frac{5}{2}t + 1)}{t} dt$;
4. $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$;

4 Mais aussi...

Exercice 22 – TPE 2009 [8/10]

Soient $f : t \mapsto \int_0^{\pi/2} e^{-t \sin x} dx$ et (E) l'équation $ty'' + y' - ty + 1 = 0$.

Montrer que f vérifie (E) . Trouver les solutions de (E) développables en séries entières. En déduire la valeur de $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

Exercice 23 – Mines 2010 : nombres de Catalan [7/10]

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$. Expliciter u_n .

Exercice 24 – À la Cesaro [9/10]

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit égal à 1. Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $b_n \sim a_n$. Montrer que lorsque x tend vers 1^- , on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Exercice 25 – Mines 2011 (MP) [6/10]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f .

1. On fixe $r \geq 0$. Calculer $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$.
2. On suppose qu'il existe une constante M telle que $|f(z)| \leq e^{M|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a_n|^{1/n} \leq \frac{eM}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 26 – Mines 2015 [9/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \text{tr}(A^n) x^n$.

5 Des indications (et même un peu mieux)

Exercice 1 – Notons R_a le rayon de convergence, et S la borne supérieure en jeu, ainsi que $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles dont R_a et S sont les bornes supérieures par définition. D'une part, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_a$, donc $S \leq R_a$. Mais si $r < R_a$, alors $\sum a_n r^n$ est convergente, donc les sommes partielles sont bornées, donc $r \in \mathcal{E}'$. Ceci montre : $R_a \leq S$ (quitte à passer par $r = S - \frac{R_a}{n}$).

Exercice 2 – On trouve $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, donc $R = 1$

Exercice 3 – D'Alembert : $\frac{1}{e}$; $\sim e^{(n+1)^2} : 0$; $a_n r^n = e^{\dots} : 1$ et 1 et 1 et 1 ; même méthode : si $\alpha > 3$ alors $R = 0$, si $\alpha < 3$ alors $R = 1$ et si $\alpha = 3$ alors $R = e^{-1/2}$; $a_n r^n = e^{\dots} : 1$.

Exercice 4 – $(a_n r^n)$ bornée ? $\frac{1}{\sqrt{999}}$; $1 ; 1 ; \sim K \varphi^n$ avec $K > 0$: $R = \frac{1}{\varphi}$.

Exercice 5 – D'Alembert pour les suites : en prenant $u_n = a_n r^n$ on s'intéresse au caractère bornée de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; finalement $R = \sqrt{\frac{1}{|\ell|}}$.

Exercice 6 – Avec $|a_n| r^n : R_1 = R^2, R_2 = +\infty$ et on ne peut rien dire pour R_3 : voir $a_n = 1$ ($R = 1$ et $R_3 = 0$), $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ ($R = +\infty$ et $R_3 = 0$), $a_n = \frac{1}{n!}$ ($R = +\infty$ et $R_3 = 1$). On peut quand même dire que si R est fini, alors $R_3 = 0$.

Exercice 7 – Il peut être intéressant de partir de $\frac{n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right) \dots$

Exercice 8 – Évidemment les choses ne se passent pas pareil selon que a est décimal (et alors les d_n sont nuls à partir d'un certain rang) ou non (et alors il y aura des $d_n \geq 1$ pour n arbitrairement grand) ; le rayon de convergence est alors égal à 1 pour le second cas. Puisque $a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, il me semble que la quantité demandée est la somme d'un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes... Et la valeur attendue est donc a^2 .

Exercice 9 – $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x(\dots)'' + \dots$

Exercice 10 – On a bien entendu $f^{(4)} = f$, équation à laquelle on peut appliquer la théorie vue en première année (le passage de l'ordre 2 à l'ordre 4 étant naturel...), ou bien comme proposé dans l'énoncé, on pose $g = f'' + f$, de sorte que $g'' - g = 0$... On aurait pu voir dès le début que $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \cosh x)$, par exemple via $e^x, e^{ix}, \dots$: cf exercice précédent.

Exercice 11 – Déjà, $\frac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} = \frac{2}{2n-1} + \frac{1}{n+1}$. Ensuite, distinguer les x strictement positifs ou négatifs. Pour $x > 0$ par exemple, on trouve $-1 - \frac{\ln(1-x)}{x} + \sqrt{x} \operatorname{Argth} \sqrt{x}$ via $F(t^2)$ ou bien en sommant des intégrales.

Avec $\operatorname{Argth} : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ qui est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}$.

Exercice 12 – pour $x > 0, f_1(x) = \sqrt{x} \operatorname{Argth}(\sqrt{x}) - 1$ (considérer $\left(\frac{f(x^2)+1}{x} \right)'$), avec $R_1 = 1$. De même, $R_2 = 1$, et après une décomposition en éléments simples, pour $x > 0 : f_2(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{5 \operatorname{Argth}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

Enfin, $R_3 = +\infty$, avec $f_3(x) = \begin{cases} \cosh \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 13 – Le rayon de convergence vaut bien entendu 1 ($a_n \sim \ln n$). Comme produit de Cauchy : $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 14 – C'est du cours sur $] -1, 1[$ (intégrer, dériver...). Trois façons de faire pour étendre la relation en -1 : la convergence uniforme sur $[-1, 0]$ par contrôle du reste ; le passage par la série harmonique via $\ln n + \gamma + o(1)$, ou encore la sommation par deux qui prouve la continuité sur $[-1, 0]$ par convergence normale. Il serait bon de maîtriser les deux premières méthodes (la dernière est moins pratiquée mais reste abordable).

Exercice 15 – Décomposition en éléments simples, dérivation... pour trouver $-10 + 2e - \frac{14}{e}$.

Exercice 16 – Sauf erreur,

$$\frac{(\operatorname{sh} \alpha)x}{x^2 - 2(\operatorname{ch} \alpha)x + 1} = \frac{(\operatorname{sh} \alpha)x}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = \frac{e^\alpha/2}{x - e^\alpha} + \frac{e^{-\alpha}/2}{x - e^{-\alpha}}.$$

Le rayon de convergence est alors $e^{-\alpha}$, et après factorisation on développe $\frac{1}{1-u}$ en série entière.

Exercice 17 – La dérivée de la fonction Arccos est développable en série entière, avec un rayon 1. En intégrant : $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 18 – Pour la continuité, convergence uniforme par contrôle du reste, ou normale par regroupement par deux. Intersion dans $\sum_n \sum_k \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{-x}{n}\right)^k$ par convergence normale (après regroupement par deux). What else ?

Exercice 19 – On devrait avoir $\frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} = O(1/R^{2p})$, ce qui n'est guère envisageable, car avec une comparaison somme/intégrale soigneuse (attention à la bosse) :

$$f^{(2p)}(0) = \sum_{n=0+}^{+\infty} n^{4p} e^{-n} \geq \int_0^{+\infty} t^{4p} e^{-t} dt - (4p)^{4p} e^{-4p} \sim (4p)!$$

d'après Stirling.

Exercice 20 – Tout d'abord, sur $] -2, 2[: f_1'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-x/3} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2} \cdots$ Ensuite $^1, \ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$; on décompose en éléments simples pour trouver sur $] -1, 1[:$

$$f_2(x) = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + 2 \cdot 2^{n/2} (2 \cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4))\right) x^n.$$

Il est pratique d'écrire $f_3(x) = (1-x)(1-x^2)^{-1/2}$, pour obtenir après produit de Cauchy entre des séries absolument convergentes (pour $|x| < 1$) :

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n} - x^{2n+1}).$$

Exercice 21 – En dérivant tout ou partie des fonctions proposées, on trouvera d'une part les rayons de convergence R (respectivement 1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ et $+\infty$), ainsi que les développements en série entière valables sur $] -R, R[:$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n}}{2n-1}; & f_2(x) &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n} (-1)^n x^n; \\ f_3(x) &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 2^{-n}}{n^2} x^n; & f_4(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2p+1} - 1}{p!(2p+1)} x^{2p+1}. \end{aligned}$$

Au passage, f_1 est bien paire comme on l'avait noté dès le début !

Exercice 22 – Théorème de Leibniz pour les deux dérivations, qui fournissent bien l'équation souhaitée, via une intégration par parties dans $tf''(t)$. Ensuite, $g(t) = \sum a_n x^n$ vérifie (E) si et seulement si $(n+1)^2 a_{n+1} = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui laisse exactement deux degrés de libertés (pour obtenir des séries de rayons de convergence infinis). Par ailleurs, on peut intervertir sans problème somme et intégrale dans

$f(t)$ (après avoir écrit l'exponentielle comme une série!), ce qui donne : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{I_n}{n!} t^n$. On trouve

finalement comme toujours : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p p!^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{4^p p!^2}{(2p+1)!}$. « Ce n'est peut-être pas la méthode la plus efficace pour calculer I_n »...

1. Désolé...

Exercice 23 – Grand classique : $f(x) = \sum u_n x^n$ vérifie, si son rayon de convergence est strictement positif : $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$, puis $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$. Réciproquement, l'application $g : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ est bien développable en série entière, et les coefficients du développement vérifient la même relation de récurrence que les u_n (avec les mêmes premières valeurs), donc sont égaux aux u_n .

Finalement, $\left(u_n = \frac{1}{2nn}\right)$.

Les informaticiens ont vu² une preuve a priori de la majoration $u_n \leq 4^n$, ce qui simplifiait une partie du raisonnement. Enfin, pour f_4 , la décomposition en éléments simples est standard. Il est intéressant de noter que les coefficients de la série de Taylor vérifient la relation $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$: il s'agit de la suite de Fibonacci, et f_4 est développable en série entière sur $]1/\alpha, -1/\alpha[$, avec $\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 24 – On va poser $c_n = b_n - a_n$ (de sorte que $c_n = o(a_n)$), et montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n =$

$o\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$. On fixe pour cela $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N au delà duquel on a d'une part $|c_n| \leq \varepsilon a_n$, et

d'autre part $\left|\sum_{k=0}^n c_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n a_k$ (théorème de comparaison des sommes partielles dans le cas d'une série positive divergente).

On a alors $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n x^n\right| \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$. Pour le premier morceau, on est ramené à des polynômes :

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^N c_n x^n}{\sum_{n=0}^N a_n x^n} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \left| \frac{\sum_{n=0}^N c_n}{\sum_{n=0}^N a_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

donc pour x assez proche de 1, etc...

Exercice 25 – Intersion somme/intégrale sans problème grâce à la convergence normale, pour trouver :

$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta = 2\pi r^n a_n$ (relation vue en cours, au passage!). En minimisant le membre de droite

de $|a_n|^{1/n} \leq \frac{e^{Mr}}{r}$ (par étude de la fonction $r \mapsto \dots$), on trouve exactement le majorant souhaité.

Exercice 26 – Après trigonalisation, $\text{tr}(A^n) = O(r^n)$, avec r le module de la plus grande valeur propre. On en déduit que le rayon R est minoré par $1/r$. Pour montrer que ce rayon vaut exactement $1/r$ c'est plus délicat : une série $\sum(u_n + v_n)$ peut converger sans que les deux sommes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient

convergentes. Mais en fait, dans le disque ouvert de rayon $1/r$, on a $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{tr}(A^n) z^n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - z\lambda_k}$.

Si on suppose que λ_1 est de module maximal, alors $|f(t/\lambda_1)| \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} +\infty$, donc S ne peut être définie (donc continue!) sur un disque ouvert $D(0, R')$ avec $R' > 1/r$.

2. en interprétant u_n comme le nombre d'arbres binaires à n nœuds