1 Racine cubique d'une matrice

Corrigé écrit par Pierrick Soleillant

1.1 Étude d'un exemple

1. Il s'agit ici de montrer que A est diagonalisable. Pour cela, on peut calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 12 \\ 1 & X-5 \end{vmatrix} = (X-4)(X-5)-12 = X^2-9X+8 = (X-1)(X-8)$$

Ainsi, A possède exactement deux valeurs propres distinctes (à savoir 1 et 8) : puisque A est une matrice carrée de taille 2, elle est donc diagonalisable, et est donc semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\text{ce qui est précisément ce qui était demandé.}}$$

2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Puisque $\left(P^{-1}BP\right)^3 = \left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}BP\right) = P^{-1}B^3P$, il vient :

$$\boxed{B^3 = A \iff B^3 = PDP^{-1} \iff P^{-1}B^3P = D \iff \left(P^{-1}BP\right)^3 = D}$$

3. Puisque Δ est une racine cubique de D :

$$\boxed{\Delta \times D = \Delta \times \Delta^3 = \Delta^3 \times \Delta = D \times \Delta}$$

Ecrivons alors $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Alors $\Delta \times D = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix}$ et $D \times \Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix}$, donc, puisque $\Delta \times D = D \times \Delta$: $\begin{cases} a &= a \\ 8b &= b \\ c &= 8c \\ 8d &= 8d \end{cases}$

Par conséquent, $b = c = 0$, donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est une matrice diagonale.}}$$

4. — Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D.
D'après **Q3.**, Δ est une matrice diagonale, que l'on peut donc écrire $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi, $\Delta^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix}$, et comme $\Delta^3 = D$, $\begin{cases} \lambda^3 = 1 \\ \mu^3 = 8 \end{cases}$
La fonction $t \mapsto t^3$ établissant une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on déduit des deux égalités ci-dessus que $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$
— Réciproquement, on vérifie facilement que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une racine cubique de D.

Par conséquent, D possède une unique racine cubique, à savoir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D'après **Q2.**, on en déduit

$$\boxed{A \text{ possède une unique racine cubique, à savoir } P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times P^{-1}.}$$

1.2 Dans un plan euclidien (optionnel pour les 3/2)

5. Puisque u est représenté dans une base *orthonormée directe* par $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$:

$$\boxed{u \text{ est la rotation vectorielle d'angle } \theta.}$$

6. Soit r la rotation vectorielle d'angle $\theta/3$: alors $r \circ r \circ r$ est la rotation d'angle $3 \times \theta/3 = \theta$, c'est-à-dire u.
   r étant représenté dans $\mathcal{B}$ par la matrice $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta/3) & -\sin(\theta/3) \\ \sin(\theta/3) & \cos(\theta/3) \end{pmatrix}$, on a $R^3 = M$.

$$\boxed{R \text{ est donc une racine cubique de } M.}$$

7. En notant v l'endomorphisme de E représenté, dans $\mathcal{B}$, par la matrice N, puisque N est une matrice orthogonale dont le déterminant vaut -1, v est une isométrie vectorielle vérifiant $\det(v) = -1$: c'est donc une réflexion de E.
   En particulier, v est une symétrie, et vérifie donc $v \circ v = \mathrm{Id}_E$.
   Par conséquent, $v \circ v \circ v = v$, et donc $N^3 = N$:

$$\boxed{N \text{ est une racine cubique de } N.}$$

1.3 Racines cubiques et diagonalisation

1.3.1 Existence d'une racine cubique polynomiale

8. On vérifie facilement (une mise au cube de matrice diagonale !) que :

$$\boxed{\text{la matrice } \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt[3]{\lambda} \end{pmatrix} \text{ est une racine cubique de } H_p(\lambda).}$$

9. Puisque A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \times \underbrace{\begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}}_{\text{écriture par blocs}} \times P^{-1}$.

   En notant, pour tout $k \in [\![1\,;d]\!]$, $R_{p_k}(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt[3]{\lambda_k} \end{pmatrix}$, d'après **Q8.**, $R_{p_k}^3 = H_{p_k}$,

   et donc :

$$\begin{pmatrix} R_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix}$$

   Par conséquent :

$$\boxed{P \times \begin{pmatrix} R_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} \times P^{-1} \text{ est une racine cubique de } A.}$$

1.3.2 Réduction d'une racine cubique

10. S'il existait $k \in [\![1\,;d]\!]$ tel que $\lambda_k = 0$, alors $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I_n) \neq \{0\}$, et A ne serait pas inversible.

$$\boxed{A \text{ étant supposée inversible, aucune de ses valeurs propres ne peut être nulle.}}$$

11. Il s'agit d'un résultat de cours de sup : tout nombre complexe non nul possède exactement trois racines cubiques.

    On peut le re-démontrer en introduisant $z \in \mathbb{C}^*$, que l'on écrit donc sous la forme $z = r e^{i\varphi}$ (où $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$) :

$$z^3 = \lambda \iff r^3 e^{i3\varphi} = \rho e^{i\theta} \iff \begin{cases} r^3 = \rho \\ \exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, 3\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, \varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

    0 n'étant clairement pas une racine cubique de λ, le travail précédent permet de conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines cubiques de } \lambda \text{ est } \left\{\sqrt[3]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\sqrt[3]{r}\, e^{i\,\frac{\theta}{3}}, \sqrt[3]{r}\, e^{i\,\frac{\theta+2\pi}{3}}, \sqrt[3]{r}\, e^{i\,\frac{\theta+4\pi}{3}}\right\}.}$$

    On justifie que les trois valeurs proposées dans la dernière description sont deux à deux distinctes (par injectivité de l'application définie sur $[\theta/3\,;\theta/3 + 2\pi[$ par $t \mapsto e^{it}$).

12. Notons, pour tout $k \in [\![1\,;d]\!]$, $\mu_{1,k}$, $\mu_{2,k}$ et $\mu_{3,k}$ les racines cubiques (deux à deux distinctes) de λ_k, de sorte que $X^3 - \lambda_k = (X - \mu_{1,k})(X - \mu_{2,k})(X - \mu_{3,k})$.

    Ainsi, $Q(X) = \prod\limits_{k=1}^{d} \left((X - \mu_{1,k})(X - \mu_{2,k})(X - \mu_{3,k})\right)$.

    Puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts et non nuls, les valeurs $\mu_{i,k}$ (où $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant k \leqslant d$) sont deux à deux distinctes, et ainsi :

$$\boxed{Q \text{ est scindé à racines simples.}}$$

13. A étant diagonalisable, puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A, le polynôme $P = \prod\limits_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ est annulateur de A.

    En d'autres termes, $\prod\limits_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n) = 0_{n,n}$.

    Ainsi, si B est une racine cubique de A, $\prod\limits_{k=1}^{d} \left(B^3 - \lambda_k I_n\right) = 0_{n,n}$, et Q est donc un polynôme annulateur de B. Ce dernier étant scindé à racines simples, on en déduit que :

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$$

2 Une série de fonctions

1. Discussion bien naturelle :
   - Si $x \in]0,1[$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
   - Si $x = 1$ la convergence semble assez claire !
   - Si $x > 1$ alors $u_n(x) = o(1/x^n)$, or $\sum \left(\frac{1}{x}\right)^n$ converge donc $\sum u_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{Il y a convergence simple sur } D = [1, +\infty[\text{ (et divergence ailleurs).}}$$

2. Si on fixe $n \geqslant 2$, une étude élémentaire de la fonction u_n montre que le maximum de $|u_n| = u_n$ est pris en $e^{1/n}$ et vaut $\dfrac{1/e}{n \ln n}$, terme d'une série « notoirement divergente » (série de Bertrand ; on l'établit par comparaison à une intégrale, sachant qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est $x \mapsto \ln(\ln x)$).

$$\boxed{\text{Il n'y a pas convergence normale sur } [1, +\infty[\text{ (ou même }]1, +\infty[).}$$

Si par contre on fixe $a > 1$ alors on aura $1 < e^{1/n} < a$ pour n assez grand, donc à partir d'un certain rang $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = |u_n(a)| = u_n(a)$, or $\sum u_n(a)$ converge, donc :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur tout intervalle } [a,+\infty[\text{, où } a > 1.}$$

3. Fixons $n \geqslant 2$. Pour $k \geqslant n+1$ on a $\dfrac{1}{\ln k} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}\cdot$ Par ailleurs, l'inégalité bien connue $\ln(1+u) \leqslant u$ se translate en $\ln(x) \leqslant x-1$, fournissant :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^k \ln k} \leqslant \frac{x-1}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{x-1}{\ln(n+1)} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{\ln(n+1)}$$

et puisque $x \geqslant 1$:

$$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}}$$

4. La dernière majoration étant valable pour tout $x \geqslant 1$, elle nous fournit : $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $D = [1,+\infty[$. Puisque chaque u_n est continue :

$$\boxed{S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \text{ est continue sur } D.}$$

5. La fonction S étant continue sur $[1,+\infty[$, on s'intéresse à son intégrabilité au voisinage de $+\infty$, par exemple via $x^2S(x)$.
Il y a convergence normale de $\sum x^2 u_n(x)$ sur $[2,+\infty[$ par exemple, et le théorème de la double limite s'applique pour nous donner : $S(x) = o(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$.

$$\boxed{S \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[.}$$

3 Préparation aux séries entières

a_n	$(a_nr^n)_n$ bornée	$(a_nr^n)_n$ convergente	$\sum a_nr^n$ convergente
1	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1[$
n	$[\mathbf{0},\mathbf{1}[$	$[0,1[$	$[0,1[$
$1/n$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1[$
$2^n/n^3$	$[0,1/2]$	$[0,1/2]$	$[0,1/2]$
$n^33^n/\ln^5 n$	$[0,1/3[$	$[0,1/3[$	$[0,1/3[$

Deux justifications :

— Si $r \leqslant 1/2$ alors $\dfrac{2^n}{n^3}r^n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ donc $\sum a_nr^n$ converge. Alors que si $r > 1/2$ on aura $\dfrac{2^n}{n^3}r^n = \dfrac{(2r)^n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées entre (n^3) et la suite géométrique de raison $2r > 1$. Ceci assure le caractère non bornée de (a_nr^n).

— Si $r \geqslant 1/3$ alors $\dfrac{n^33^n}{\ln^5 n}r^n \geqslant \dfrac{n^3}{\ln^5 n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors que si $r < 1/3$ on peut fixer t dans $]r,1/3[$ et on aura $0 \leqslant \dfrac{n^33^n}{\ln^5 n}r^n \leqslant \dfrac{n^3}{\ln^5 n}(3t)^n = o(1/n^2)$ par croissances comparées entre (n^5) et la suite géométrique de raison $3t \in]0,1[$. Ceci assure la convergence de $\sum a_nr^n$.