Intégration

1 Rappels de première année ; intégration sur un segment

Exercice 1 – *TPE 2017 (deux fois) [3/10]*
Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2} \mathrm{e}^{-n/k}.$$

Exercice 2 – *CCP 2017 [6/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n} dt$.

1. Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Établir la nature de $\sum u_n$.

Exercice 3 – *Mines 2016 [9/10]*
Soit f une fonction continue et à valeurs positives sur $[a, b]$. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$I_n = \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{1/n}$$

Exercice 4 – *CCP 2016 [8/10]*
On pose $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$, et pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{sh}^n(t) dt$.

1. Résoudre $\mathrm{sh} x = 1$.
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. (a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
   (b) En déduire un encadrement puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 – *TPE 2009 [3/10]*
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
Indication : *On pourra considérer la fonction* $t \mapsto (1-t^2)^n$.

2 Intégrales convergentes et fonctions intégrables

Exercice 6 – *Colle 2023-2024 [8/10]*
Soit $a > 0$. Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt$$

Exercice 7 – *CCP 2017 [6/10]*
On admet : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction
$$\frac{2X+1}{X(X+1)^2}.$$
2. Justifier l'existence et calculer la valeur de
$$\int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt.$$

Exercice 8 – *Centrale 2017 [6/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

1. Expliciter une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. On définit (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) : $v_n = \ln(u_n) + \alpha \ln(n)$. Étudier, en fonction de α, le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 – *Mines 2017 [6/10]*
On suppose : $0 < a < b$, et f désigne une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Prouver l'existence de l'intégrale suivante, et donner sa valeur :
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$$

Exercice 10 – *Mines 2017 [6/10]*
Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^3 x} dx$.

Exercice 11 – *Mines-Télécom 2016 [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

1. On suppose : $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Montrer : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
2. On suppose : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Que dire de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$?
3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(2t) - \mathrm{Arctan}(t)}{t} dt$.

Exercice 12 – *Mines 2010 [6/10]*
Montrer que $f : x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Exercice 13 – $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *[5/10]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Montrer : $\ell = 0$.
2. Exhiber un cas de fonction dérivable et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que sa dérivée ne possède pas de limite en $+\infty$.

Exercice 14 – *Mines 2015 [6/10]*

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du.$$

2. Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique et de moyenne nulle. Montrer que $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(u)du$ est périodique.

3. [Ajoutée par mes soins] Montrer que sous les conditions de la question précédente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ est convergente.

4. Soit $\delta \in]0,1[$. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^x \left| \frac{\sin u}{u^\delta} \right| du$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3 Interversions de symboles

Exercice 15 – *Colle 2023-2024 [7/10]*
Soit $f \in L^1([0, \mathrm{e}^{-1}[$. Montrer :

$$\int_0^{(1-1/n)^n} x^{1/n} f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\mathrm{e}^{-1}} f(x)dx.$$

Exercice 16 – *Mines 2022 [6/10] - Maxence N.*

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(at)\mathrm{e}^{-bt} dt$ et calculer sa valeur.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

Exercice 17 – *ENSAM 2017 [4/10]*

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx$.

2. Montrer : $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

3. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, donner la valeur de I.

Exercice 18 – *Mines-télécom 2017 [4/10]*
On définit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x} dx$.

1. Montrer que I est définie.

2. En utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-u}$, montrer :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

3. Calculer I (on donne : $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 19 – *CCP 2017 (deux fois) [6/10]*

Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.

Exercice 20 – *Centrale 2015 et CCP 2016 [6/10]*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Justifier l'existence de $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.
3. Montrer : $I_n \sim \dfrac{L}{n}\cdot$
4. Montrer enfin :

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cdot$$

Exercice 21 – $\displaystyle\int_0^n f(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ *[4/10]*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la suite de terme général

$$I_n = \int_0^n f(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

converge vers...

Exercice 22 – *Centrale 2015 [6/10]*

Soit $a \in]0, \pi/2[$. Étudier la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^a (\tan t)^n dt$.

Exercice 23 – *TPE 2015 [5/10]*

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$

Exercice 24 – *TPE 2015 [5/10]*

On définit :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n}dt$$

1. Justifier l'existence de I_n, et calculer sa valeur.
2. Montrer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(t-1)}dt$$

Exercice 25 – *ENSAM 2015 [6/10]*

On définit, pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\mathrm{e}^x - 1}dx$.

1. Justifier l'existence de $I(\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer[1] a et b tels que $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+b}\cdot$
3. En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

1. Question très mal posée : je peux prendre $b = 945$ et adapter a...

Exercice 26 – *Mines 2018 [5/10]*

1. Donner les deux théorèmes d'interversion somme/intégrale. En prouver un.
2. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

4 Intégrales à paramètres

Exercice 27 – *CCINP 2022 [3/10] - Perla E.K.*
On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\sin(xt)dt$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Exprimer φ' puis φ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 28 – *CCINP 2022 [4/10] - Hugo D.*
On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}dt$.

1. Montrer que F est définie au moins sur $]-1,1[$
2. Montrer que F est développable en série entière.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
4. Donner une expression simple de $F'(x)$.
5. Retrouver le résultat de la question précédente d'une autre manière.

Exercice 29 – *Mines 2017 [8/10]*
On définit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+\operatorname{ch} t}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Prouver le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.
3. Établir l'existence et la valeur de la limite de f en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 30 – *Centrale 2016 [6/10]*

1. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ est convergente.
2. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ est convergente.
5. Montrer que
$$\widetilde{f} : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_- \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 31 – *ENSEA 2016 [5/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{ixt}dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathcal{C}^1$.
2. En passant par une équation différentielle, calculer $f(x)$.

Exercice 32 – *Mines-Télécom 2016 [5/10]*
Pour $x \in D = [1, +\infty[$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1+xt^3} dt$.

1. Montrer que f est continue sur D.
2. Montrer qu'au voisinage de 0, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} x^{3n}$.

Exercice 33 – *CCP 2008 [5/10]*
On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{t^2+1} dt$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} du\right)^2$.

1. F est-elle continue sur $[0, +\infty[$? Dérivable ?
2. Montrer que $G(x) = \dfrac{\pi}{4} - F(x)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du$.

Exercice 34 – *Petites mines 2015 [5/10]*
On définit (quand c'est possible !) :

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{x} dx$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Calculer sous forme simple $F'(\lambda)$ puis $F(\lambda)$.
4. Soient $a, b > 0$. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} dx$?

Exercice 35 – *CCP 2015 [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad |f(t)| \leqslant C\mathrm{e}^{at}.$$

1. Montrer que pour $x > a$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt} dt$ converge.
2. On suppose que $a = 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$xF(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ell.$$

5 Indications, solutions partielles

Exercice 1 – J'ai d'abord pensé qu'il y avait une erreur dans l'énoncé... mais non, c'est bien directement une somme de Riemann de fonction continue !

Exercice 2 – Une simple majoration de u_n par $\displaystyle\int_0^1 x^n dx$ est suffisante pour la première question. J'ai dû un peu plus chercher avant de trouver la minoration $1 + x + \cdots + x^n \geqslant \dfrac{n}{2} x^{n/2}$ pour conclure... (je ne savais pas si je devais majorer ou minorer, donc j'ai dû tâtonner).

Exercice 3 – La limite de $\|f\|_n$ est bien entendu $\|f\|_\infty$! Exercice difficile car il faut epsiloniser. Tout d'abord (après avoir fixé $\varepsilon_0 > 0$) $\|f\|_n \leqslant (b-a)^{1/n} \|f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$, donc $\|f_n\| \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon_0$ à partir d'un certain rang. Ensuite, il existe x_0 tel que $f(x_0) = \|f\|_\infty$, ainsi qu'un segment $[\alpha, \beta]$ sur lequel $f \geqslant f(x_0) - \varepsilon_0/2$. On minore alors $\|f\|_n$ par une quantité convergeant vers $\|f\|_\infty - \varepsilon_0/2$, donc $\|f_n\| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon_0$ à partir d'un certain rang... et on y est presque !

Exercice 4 – Partir de $\mathrm{sh}^n = \mathrm{sh}^{n-2}\mathrm{sh}^2 = \mathrm{sh}^{n-2}(\mathrm{ch}^2 - 1)$, casser en deux, intégrer par parties... Le théorème de convergence dominée donne bien : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, qu'on peut aussi obtenir via $I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n}$. J'ai probablement loupé quelque chose, car pour l'équivalent, j'ai besoin de $I_n \sim I_{n-2}$, et pour cela je passe par I_{n-4} : $nI_n + I_{n-2} = (n-3)I_{n-4}$ fournit $I_n \sim I_{n-4}$, puis par encadrement/gendarmes, $I_n \sim I_{n-2}$ et enfin $2nI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$; WOW...

Exercice 5 – Intégrer n fois par parties la fonction suggérée...

Exercice 6 – Je trouve $a\pi$ après travail assez long sur $\displaystyle\int_\varepsilon^A$.

Exercice 7 – La fonction en jeu étant positive, elle est intégrable si et seulement si l'intégrale est convergente (assurez-vous de bien comprendre cette phrase), ce qui conduit à s'intéresser à $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. Puisque Φ est décroissante, sa limite (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) en 0^+ est celle de $\Phi(1/n)$... qui doit être égale, sauf erreur de ma part, à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdots$

Exercice 8 – Sauf erreur, en partant de

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1+t^3}{(1+t^3)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}} + \frac{t}{3}\frac{3t^2}{(1+t^3)^{n+1}}$$

puis en intégrant par parties ce qu'on imagine, je trouve après nettoyage : $u_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} u_n$. Ensuite, $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\dfrac{1}{3n} + O(1/n^2)$, puis $v_{n+1} - v_n = (-1/3 + \alpha)\dfrac{1}{n} + O(1/n^2)$; il semble alors raisonnable de prendre $\alpha = 1/3$, et on obtient alors $\sum(v_{n+1} - v_n)$ convergente, donc $u_n = \mathrm{e}^{(-\ln n)/3 + \ell + o(1)}$ et enfin : $u_n \sim \dfrac{K}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 9 – Passer par $\displaystyle\int_\varepsilon^X$, qui se casse en deux morceaux : $\displaystyle\int_{aX}^{bX}$ tend vers 0 et $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}$ tend vers $f(0)\ln\dfrac{b}{a}$ (attention, il est probablement question de la différence de ces deux morceaux...).

Exercice 10 – D'abord une intégration par parties ($\dfrac{\mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^3} = \mathrm{sh} \times \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}^3}$) puis le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$... Le résultat très simple ($\pi/4$) que me donne Wolfram-Alpha me laisse penser que je suis passé à coté de quelque chose...

Exercice 11 – L'auteur de l'exercice voulait probablement epsiloniser, mais avec des changements de variables de type $t = xu$, on peut s'en sortir avec de la convergence dominée pour les deux premières questions. Ensuite, considérer l'intégrale sur $[\alpha, M]$...

Exercice 12 – Commencer par le changement de variable $u = x^2$ sur $[1, X]$; ensuite, en notant $I_n = [-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi]$, minorer $\displaystyle\int_{I_n} |f|$ par quelque chose en $1/\sqrt{n}$. Sans la valeur absolue, je proposerais bien une intégration par parties, comme dans le cours...

Exercice 13 – Si $\ell > 0$, alors $f(t) \geqslant \dfrac{\ell}{2}t$ pour t assez grand... Pour le contre-exemple, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(\mathrm{e}^{2t})$ doit convenir.

Exercice 14 – Bien distinguer $]0,1]$ (sur lequel l'intégrabilité vient du caractère prolongeable en une fonction continue) et $[1,+\infty[$ sur lequel l'intégrale de $\dfrac{\sin u}{u}$ est convergente après intégration par parties. Pour le caractère non convergent de la deuxième intégrale, on pourra minorer les intégrales sur $[k\pi,(k+1)\pi]$ comme dans le cours. Pour la dernière question également, une bonne évaluation de l'intégrale sur $[k\pi,(k+1)\pi]$ a un certain intérêt...

Exercice 15 – CVD avec indicatrice, domination par $|f|$.

Exercice 16 – L'intégrale initiale est probablement la partie réelle d'une intégrale plus simple à calculer. Un calcul purement formel fournit la relation demandée, après avoir écrit le cosinus hyperbolique à l'aide d'exponentielle et un petit développement $\frac{1}{1-u} = \cdots$ Cependant la justification ne passe pas via le premier théorème auquel on pense (la série des intégrales des modules diverge). Je passerais bien par les sommes partielles puis j'appliquerais ensuite le théorème de convergence dominée.

Exercice 17 – Sans finesse, on trouvera : $I = 2 - \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

Exercice 18 – Cas d'école d'interversion. Je trouve $\dfrac{\pi^2}{4}\cdot$ Wolfram-Alpha aussi, ce qui est bon signe.

Exercice 19 – Aucun des deux théorèmes auxquels vous pensez pour intervertir ne va fonctionner (pas de convergence uniforme ; pourquoi ? Et comme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\,dt$ est en $1/\sqrt{n}$...). Par contre, on peut contrôler à la main la différence entre la somme partielle et la limite candidate, avec le théorème de convergence dominée.

Exercice 20 – Au nez, sans faire les calculs, je dirais : théorème de convergence dominée, changement de variable $u = t^n$ suivi d'un deuxième théorème de convergence dominée, un petit développement en série entière sur $]0,1[$ et enfin une interversion somme-intégrale !

Exercice 21 – Travailler sur $[0,+\infty[$ (en multipliant par $\chi_{[0,n]}$). La domination se fait grâce à $\ln(1-u) \leqslant -u$, comme souvent.

Exercice 22 – On traite d'abord par majoration/minoration les cas $a \neq \frac{\pi}{4}\cdot$ Pour la cas limite, $u = \tan\theta$ puis $v = u^n$. Et que de dire de la série, au passage ? *On trouvera comme équivalent :* $\frac{1}{2n}\cdot$

Exercice 23 – Convergence dominée, puis $u = t^n$.

Exercice 24 – L'existence ne pose guère de problème (domination par $\frac{1}{t^{3/2}}$ au voisinage de $+\infty$). On trouvera après une simple intégration par parties : $I_n = \dfrac{1}{(n-1)^2}\cdot$ pour conclure, l'interversion somme-intégrale se fait sans problème.

Exercice 25 – $\dfrac{\sin(\alpha x)}{\mathrm{e}^x - 1}$ est la partie imaginaire de $\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha x}}{\mathrm{e}^x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}$, et il est tentant pour intégrer tout cela, d'intervertir somme et intégrale... mais ça ne marche pas à cause de la partie réelle. On préférera donc voir $\sin(\alpha x)$ comme la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{i\alpha x} - 1$. Finalement, $I(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha}{n^2+\alpha^2}\cdot$

Une comparaison somme-intégrale (à α fixé) me donne : $I(\alpha) \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ (et l'énoncé était donc vache... si c'était le bon).

Exercice 26 – Seul celui sur un segment (avec convergence uniforme) a sa preuve accessible/au programme... Partant du DSE du logarithme, le calcul (une interversion !) se fait sans mal.

Exercice 27 – C'est inclus dans un exercice traité en cours ! $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ puis $\varphi(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 28 – À x fixé, interversion somme/intégrale par convergence uniforme (contrôle du reste d'une série alternée). En dérivant une série entière ou bien une intégrale à paramètre : $F'(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot$

Exercice 29 – Ça se calcule « relativement bien », mais je ne sais pas si c'était attendu (j'ai calculé effectivement $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\ln\dfrac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}} \sim \dfrac{\ln x}{x}$ pour la dernière question, n'arrivant pas à faire sans, mais je ne sais pas si j'étais dans l'esprit de l'énoncé ; j'aurais tendance à dire non !). Pour la limite en $+\infty$, on aura utilisé « la convergence dominée continue via la caractérisation séquentielle de la limite »... ou bien d'abord un argument de monotonie, avant de considérer $f(n)$, permettant de déterminer la limite dont on a prouvé précédemment l'existence.

Exercice 30 – Pour la régularité, on localise sur $[\alpha, 1]$. L'inversion de symbole se fait normalement (...). Pour le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f, on a intérêt à travailler sur $]-p-1, -p[$ (avec $p \in \mathbb{N}$) en commençant par mettre de côté les $p+1$ premiers termes de la série...

Exercice 31 – $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{x-i}{x^2+1}f(x)$, puis $f(x) = K\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}(x)i/2}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$ (avec $K = \sqrt{\pi}$ accessoirement).

Exercice 32 – $1 + xt^3 \geqslant 1 - t^3 = (1-t)(1+t+t^2)$...

Exercice 33 – Domination globale par $\dfrac{1}{1+t^2}$ pour F, et par $\mathrm{e}^{-\varepsilon(1+t^2)}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour F'. On trouve alors $G' = -F'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on ajuste la constante en 0 (par continuité). On termine en faisant tendre x vers $+\infty$, avec une petite convergence dominée pour $F(x)$.

Exercice 34 – $D_F =]0, +\infty[$. Pour $\lambda \in [A, +\infty[$, on domine sans mal $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\right| = \left|\mathrm{e}^{-\lambda x}\right|$ par e^{-Ax}, puis F est $\mathcal{C}^1$, avec $F'(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\cdot$ L'intégrale demandée vaut $F(b) - F(a) = \ln \frac{b}{a}\cdot$

Exercice 35 – Déjà, $xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u/x)\mathrm{e}^{-u}du$, et $\ell = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ell\mathrm{e}^{-u}du$. Pour montrer que la différence tend vers 0 en 0^+, on prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0^+, et on montre que $F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par convergence dominée. On termine par caractérisation séquentielle de la limite.