



1 Pour ne pas perdre la main

Tout d'abord, $P = X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A , donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P , c'est-à-dire $\{0, 1, 2\}$. Par ailleurs, A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre (on rappelle que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible). Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.

Puisque A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable. Si on note u l'endomorphisme canoniquement associé, on a au choix : $\mathbb{R}^6 = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id})$, ou encore l'existence d'une base \mathcal{F} de E telle que (en notant k la dimension de $\text{Ker}(u - \text{Id})$) :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2I_{6-k} \end{pmatrix}$$

On utilise bien entendu la trace pour déterminer k :

$$\text{tr}(A) = 11 = \text{tr}(u) = k + 2(6 - k) = 12 - k,$$

donc $k = 1$.

Enfin, A^{999} est la matrice de u^{999} dans la base canonique de \mathbb{R}^6 , donc $\text{tr}(A^{999}) = \text{tr}(u^{999})$, qu'on peut calculer plutôt dans la base adaptée :

$$\text{tr}(A^{999}) = \text{tr}(u^{999}) = \text{tr}(\text{Mat}(u^{999}, \mathcal{F})) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2^{999} I_5 \end{pmatrix}$$

soit finalement :

$$\boxed{\text{tr}(A^{999}) = 1 + 5 \times 2^{999}}$$

2 Séries entières : développement de $1/f$

1. On a $f(0) \neq 0$, et f est continue en 0 (comme en tout point du disque ouvert de convergence), donc :

$$\boxed{\text{Il existe un voisinage de 0 sur lequel } f \text{ ne s'annule pas.}}$$

Les sceptiques sortiront les ε : il existe $\eta > 0$ tel que $|z - 0| \leq \eta$ implique $|f(z) - f(0)| \leq \frac{|a_0|}{2} \dots$

2. Pour $|z| < R = \min(R_f, R_g)$, les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc leur produit de Cauchy $\sum_n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ également, et la somme de ce produit de Cauchy vaut d'une part $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$ et d'autre part $f(z)g(z) = 1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0z^n$, donc par unicité du développement en série entière :

$$\boxed{a_0 b_0 = 1, \text{ et pour tout } n \geq 1, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0.}$$

3. Pour trouver une solution, il suffit de construire les b_n par récurrence, en posant $b_0 = \frac{1}{a_0}$, puis

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

On a prouvé l'existence mais pas l'unicité. Attention au passage aux preuves d'unicité par récurrence : on peut facilement faire l'erreur de raisonnement « *il existe un unique chemin de A vers B et il existe un unique chemin de B vers C, donc il existe un unique chemin de A vers C* »...

Pour l'unicité, on peut par exemple supposer que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux solutions distinctes à notre système d'équations, et noter n_0 le plus petit indice tel que $b_{n_0} \neq b'_{n_0}$. On a alors $n_0 \neq 0$ (puisque $b_0 = b'_0 = \frac{1}{a_0}$), et $b_k = b'_k$ pour tout $k < n_0$, donc

$$b_{n_0} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n_0} a_k b_{n_0-k} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n_0} a_k b'_{n_0-k} = b'_{n_0},$$

ce qui est absurde.

Le système d'équations précédent possède une unique solution.

Essentiellement, on est face à un système linéaire certes infini, mais triangulaire, d'où l'existence et l'unicité de la solution.

4. Par définition du rayon de convergence, la suite $\left(a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc :

Il existe $K_1 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq K_1 \left(\frac{2}{R}\right)^n$.

5. Par inégalités triangulaires multiples, et en utilisant la majoration des $|b_k|$ pour $k < n$, on obtient :

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left| -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right| \leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^n K_1 K_2^k \alpha \beta^{n-k} \\ &= \frac{K_1 \alpha \beta^n}{|a_0|} \sum_{k=1}^n \left(\frac{K_2}{\beta}\right)^k = \frac{K_1 K_2 \alpha}{|a_0| (\beta - K_2)} \left(1 - \left(\frac{K_2}{\beta}\right)^n\right) \beta^n. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\beta > K_2$, on obtient alors :

$$|b_n| \leq \frac{K_1 K_2 \alpha}{|a_0| (\beta - K_2)} \beta^n.$$

6. Pour prouver la proposition « $|b_n| \leq \alpha \beta^n$ », il suffit que cette proposition soit vérifiée au rang 0 (c'est-à-dire $\alpha \geq |b_0|$), et qu'elle soit héréditaire, ce qui sera assuré si $\beta > K_2$ et $\frac{K_1 K_2}{|a_0| (\beta - K_2)} \leq 1$:

il suffit pour cela de prendre $\beta = K_2 + \frac{K_1 K_2}{|a_0|}$.

On fixe α et β ainsi (pour α , on prend $|b_0|$) : la question précédente permet alors de prouver par récurrence l'inégalité $|b_n| \leq \alpha \beta^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette majoration peut se récrire $|b_n| \left(\frac{1}{\beta}\right)^n \leq \alpha$, ce qui nous assure que le rayon de convergence R_b de $\sum b_n z^n$ est minoré par $\frac{1}{\beta}$, donc est **strictement positif**.

Sur le disque ouvert $D(0, r)$ avec $r = \min(R_f, R_g) > 0$, la série $\sum b_n z^n$ est donc absolument convergente, et la fonction somme h vérifie pour tout $z \in D(0, r)$:

$$f(z)h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = 1,$$

donc $h(z) = \frac{1}{f(z)} = g(z)$.

Si f est développable en série entière en 0 et $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0

7. Il suffit de prendre $f(z) = 1 - z$ ou $f(z) = \frac{1}{1-z}$, pour changer...

L'exemple universel $\sum z^n \dots$ est vraiment universel !

En fait, on peut montrer que le rayon de convergence R_g de $\sum b_n z^n$ est la borne inférieure des $r > 0$ tels qu'il existe z de module r tel que $f(z) = 0$. Il est clair que R_g est majoré par cette borne inférieure. La minoration vient d'un résultat assez profond : il existe sur le cercle de convergence un « point singulier », c'est-à-dire un point au voisinage duquel on ne peut prolonger analytiquement $g \dots$ Les détails seront dans votre cours sur les fonctions holomorphes l'année prochaine !

3 Séries entières (d'après un oral de centrale PSI)

1. Les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A = X^2 + X - 1$. Puisque le discriminant est strictement positif, il y en a deux, et elles sont réelles : notons les λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Leurs valeurs ne sont pas si intéressantes que cela ; c'est plus leur signe et leur module qui nous intéressent. Puisque $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, on a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, et puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$, on a même $\lambda_1 < -1$; enfin, comme $|\lambda_1 \lambda_2| = 1$, on a $0 < \lambda_2 < 1$!

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \text{ avec } \lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0, 1[$$

2. Tout d'abord, tout le monde aura noté que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Notons V_1 et V_2 deux vecteurs propres pour A (on raisonne matriciellement, pour changer) : ils constituent une famille libre donc génératrice de \mathbb{R}^2 , donc il existe une décomposition $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \alpha V_1 + \beta V_2$. Puisque $AV_1 = \lambda_1 V_1$, on a par récurrence immédiate $A^n V_1 = \lambda_1^n V_1$, et le résultat analogue pour $A^n V_2$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n (\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha \lambda_1^n V_1 + \beta \lambda_2^n V_2$$

V_1 et V_2 étant des vecteurs constants, si on observe les deux lignes de la relation matricielle précédente, on obtient le résultat souhaité :

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont combinaisons linéaires de } (\lambda_1^n) \text{ et } (\lambda_2^n).$$

Arrivé ici, on ne peut pas exclure que ces combinaisons linéaires soient « partiellement triviales », i.e. : avec une composante nulle.

3. On se souvient que $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$, donc les relations précédentes nous disent que u_n est équivalent à quelque chose de la forme $K \lambda_1^n$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $(u_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leq \frac{1}{|\lambda_1|}$, ce qui donne le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$, le même raisonnement étant valable pour la seconde série entière.

Mais attention, sommes-nous certains que « la composante en λ_1^n est non nulle » ? Il s'agit de vérifier que d'une part $\alpha \neq 0$ et d'autre part V_1 possède deux composantes non nulles.

- Si $\alpha = 0$, alors $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à V_2 , donc est vecteur propre de $A \dots$ ce qui n'est

pas le cas puisque $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Si V_1 possède l'une de ses composantes nulles, alors l'un des deux vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 est vecteur propre pour A : ce n'est pas le cas non plus car $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Finalement, il y a effectivement une composante non nulle selon (λ_1^n) , pour (u_n) comme pour (v_n) .

$$\text{Les rayons de convergence de } \sum u_n x^n \text{ et } \sum v_n x^n \text{ sont égaux à } R = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

4. Sur $] -R, R[$, toutes les séries en jeu sont convergentes, et on peut joyeusement écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n,$$

c'est-à-dire $U(x) - 1 = x(U(x) - V(x))$, et de la même manière : $V(x) - 1 = x(U(x) - 2V(x))$.
On peut réécrire ces informations sous la forme d'un système :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad \begin{cases} (1-x) & U(x) & + & x & V(x) & = & 1 \\ x & U(x) & - & (1+2x) & V(x) & = & -1 \end{cases}$$

5. Le déterminant du système précédent est $-(1-x)(1+2x) - x^2 = x^2 - x - 1$, donc est nul si et seulement si $(\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$, c'est-à-dire¹ : $\frac{1}{x} \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
Déjà, on est rassuré : $|x| < \frac{1}{|\lambda_1|} < \frac{1}{|\lambda_2|}$ donc ce déterminant est non nul, donc le système va posséder une unique solution... qu'on trouve maintenant comme on veut² :

$$\text{Pour } x \in] -R, R[, U(x) = \frac{-1-x}{x^2-x-1} \text{ et } V(x) = \frac{-1}{x^2-x-1}.$$

4 Une intégrale

1. Lorsque θ décrit $[0, \pi]$, $\frac{\theta}{2}$ décrit $[0, \pi/2]$, et la fonction \tan n'est tout bêtement pas définie sur ce segment entier...
2. L'application $\varphi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1 + \sin \theta}{2 + \cos \theta}$ est continue (numérateur et dénominateur le sont, et ce dernier reste à valeurs minorées par 1, donc strictement positives). Le théorème fondamental du calcul différentiel/intégral nous assure alors que f est une primitive de φ , donc de classe \mathcal{C}^1 , et a fortiori :

L'application f est continue.

3. L'existence de cette décomposition est donnée par le cours... Et on explicite les coefficients en s'intéressant à $((1+X^2)F)(i)$ qui vaut d'une part $ai + b$ et d'autre part $\frac{(1+i)^2}{2} = i$, donc (a et b étant réels...) par identification des parties réelles et imaginaires : $a = 1$ et $b = 0$.

De même, $((X^2+3)F)(i\sqrt{3}) = ci\sqrt{3} + d = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{-2}$ donc $c = -1$ et $d = 1$:

$$\frac{(1+X)^2}{(3+X^2)(1+X^2)} = \frac{X}{1+X^2} + \frac{1-X}{3+X^2}.$$

4. C'est du cours de première année... on peut par exemple écrire (on prend garde au fait qu'on divise par des choses non-nulles...) :

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 2t \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Pour le cosinus, on peut ensuite par exemple retrouver (je ne connais pas cette formule, vraiment !)

$$\tan(2u) = \dots = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \text{ donc } \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}, \text{ etc.}$$

5. Sur $[0, x]$, le changement de variable $t = \tan(\theta/2)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \int_0^{\tan(x/2)} \frac{(1+t)^2 dt}{(3+t^2)(1+t^2)} = 2 \int_0^{\tan(x/2)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t-1}{3+t^2} \right) dt \\ &= \int_0^{\tan(x/2)} \left((\ln(1+t^2))' - (\ln(3+t^2))' \right) dt + 2 \int_0^{\tan(x/2)} \frac{dt}{1+t^2}, \end{aligned}$$

1. On reconnaît le polynôme caractéristique de A ; incroyable !

2. Je fermerai les yeux sur les pires obscénités que vous ne manquerez pas d'écrire pour arriver à vos fins...

soit finalement ³ :

$$f(x) = \ln 3 + \ln \frac{1 + \tan^2(x/2)}{3 + \tan^2(x/2)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}.$$

6. La continuité de f nous assure : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} f(\pi)$. Mais après le calcul précédent on peut écrire :

$$f(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + \ln \frac{1 + \tan^2(x/2)}{3 + \tan^2(x/2)} \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

donc par unicité de la limite :

$$\int_0^\pi \frac{1 + \sin \theta}{2 + \cos \theta} d\theta = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

3. $\left(\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a^2 + x^2}$