Samedi 6 décembre 2025 – calculatrices interdites

1 Pour ne pas perdre la main

Soit $A \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 11$, et $A(A - I_6)(A - 2I_6) = 0$. Que vaut $\mathrm{tr}(A^{999})$?

On pourra diagonaliser A...

2 Séries entières : développement de $1/f$

Soit f une fonction développable en série entière. On suppose que $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R_f > 0$ et que pour tout complexe z tel que $|z| < R_f$, on a $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose enfin : $a_0 \neq 0$.

On se propose de montrer que $\dfrac{1}{f}$ *est développable en série entière au voisinage de* 0.

1. Justifier le fait que $g = \dfrac{1}{f}$ est définie sur un voisinage de 0.
2. On suppose ici (et seulement dans cette question) que $g = \dfrac{1}{f}$ est développable en série entière : $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ pour $|z| < R_g$. Déterminer un système (infini) d'équations vérifiées par $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Réciproquement (sans faire l'hypothèse que g est développable en série entière !), vérifier que les équations précédentes possèdent une unique solution.
   On fixe les b_n ainsi dans la suite, et on cherche à établir une majoration de la forme $|b_n| \leqslant \alpha\beta^n$.
4. Montrer qu'il existe $K_1, K_2 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant K_1 K_2^n$.
5. On suppose avoir établi les majorations $|b_k| \leqslant \alpha\beta^k$ pour tout $k < n$. Que peut-on en déduire sur $|b_n|$?
6. Conclure !
7. Donner un exemple pour lequel $R_f < R_g$; et un autre pour lequel $R_g < R_f$.

3 Séries entières (d'après un oral de centrale PSI)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$, puis les relations $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$

On définit (en cas de convergence) $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $V(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

1. Donner les valeurs propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que (u_n) et (v_n) s'expriment comme des combinaisons linéaires de deux suites géométriques.
3. En déduire les rayons de convergence R_1 et R_2 des séries $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$.
4. Établir deux relations simples liant $U(x)$ et $V(x)$ sur des domaines à préciser.
5. En déduire les valeurs de $U(x)$ et $V(x)$ sur ces domaines.

4 Une intégrale

On va calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta} d\theta$. On définit pour cela l'application

$$f \left\| \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta} d\theta \end{array} \right.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas faire directement le changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ dans I ?
2. Justifier la continuité de f.
3. Réaliser la décomposition en éléments simples de $\dfrac{(1+X)^2}{(3+X^2)(1+X^2)}$.
   Plus précisément, expliciter a, b, c, d tels que :
   $$\frac{(1+X)^2}{(3+X^2)(1+X^2)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+3}.$$
4. Montrer que si $\theta \in [0, \pi[$ et $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ alors :
   $$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$
5. Calculer $f(x)$ pour $x < \pi$.
6. Que vaut I ? *On demande une justification propre !*