1 Convergence de séries par transformation d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 \end{aligned}$$

c'est à dire le résultat demandé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n}$$

2. (a) La série $\sum (a_k - a_{k+1})$ est de même nature que la suite (a_n) (c'est du cours ! revenir à la définition de la convergence d'une série...). Comme les hypothèses nous assurent que (a_n) converge...

$$\boxed{\sum (a_k - a_{k+1}) \text{ est convergente.}}$$

(b) Il s'agit ici de montrer que la suite (S_n) est convergente. Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (B_n) est bornée, on a déjà $a_n B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et on est donc ramené à la convergence de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$, ou encore de la série de terme général $u_k = (a_k - a_{k+1}) B_k$.
Si on note M un majorant de $(|B_n|)$, on a alors $|u_k| = |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leqslant M (a_k - a_{k+1})$. Or $\sum M (a_k - a_{k+1})$ est convergente (question précédente), donc par comparaison de **séries à termes positifs**, $\sum |u_k|$ est convergente.
Ainsi, $\sum u_k$ est absolument convergente donc convergente, ce qui était le dernier morceau du puzzle.

$$\boxed{\sum a_n b_n \text{ est convergente}}$$

Je sais déjà que je vais rencontrer beaucoup de majorations de sommes partielles pour prouver les convergences... Allez, des majorations de modules de sommes partielles pour les plus attentifs...

(c) Commençons par l'énoncé (qui ne parle pas du contrôle du reste) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ est alternée avec } (|u_n|) \text{ décroissante de limite nulle, alors } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Les hypothèses nous permettent d'écrire $u_n = (-1)^n |u_n|$ (ou $(-1)^{n+1} |u_n|$, mais on va traiter le premier cas). Prenons, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = |u_n|$ et $b_n = (-1)^n$. D'une part (a_n) est bien décroissante de limite nulle, et d'autre part on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
donc (B_n) est bornée, donc le résultat prouvé dans la question précédente s'applique, nous assurant que $\sum a_n b_n$, c'est-à-dire $\sum u_n$ est bien convergente.

$$\boxed{\text{c.q.f.d.}}$$

3. (a) Puisque $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$, il est question de sommer les termes d'une suite géométrique **de raison différente de** 1, ce qui ne pose normalement pas de problème [1]. Ensuite, on factorise via l'angle moitié en haut et en bas pour voir apparaître des sinus (et NON, je ne ferai pas le pari que vous avez simplifié de tête les facteurs $-2i$ s'ils n'apparaissent pas sur votre copie...) :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)i\theta/2}(-2i)\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{e}^{i\theta/2}(-2i)\sin\frac{\theta}{2}},$$

soit finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \mathrm{e}^{ni\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

(b) On note bien entendu que $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}\cdot$ Déjà, si $\alpha \leqslant 0$, alors $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ ne converge pas vers 0, donc $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)$ non plus, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Il y a un autre cas assez simple : si $\alpha > 1$, alors $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente, donc est convergente.

Supposons maintenant : $0 < \alpha \leqslant 1$. En prenant $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = \mathrm{e}^{ni\theta}$, on a (avec les notations de l'énoncé) :

$$|B_n| = \left|\mathrm{e}^{ni\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| = \frac{\left|\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

ce qui permet d'appliquer la question II.2.b (puisque évidemment (a_n) est décroissante de limite nulle) : $\sum a_n b_n = \sum \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ est } \begin{cases} \text{grossièrement divergente} & \text{si } \alpha \leqslant 0 \\ \text{semi-convergente} & \text{si } 0 < \alpha \leqslant 1 \\ \text{absolument convergente} & \text{si } 1 < \alpha \end{cases}}$$

4. La question précédente nous assure ($\alpha = 1/2$) la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{n}}$ donc de la série des parties imaginaires $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ si $x \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$. Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $u_n(x) = 0$, donc $\sum u_n(x)$ est également convergente.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

2 Convergence uniforme de séries

1. (a) Si on note $G_n = a_n F_n$, il vient immédiatement pour tout $z \in A$ (les a_n sont des réels positifs puisqu'ils décroissent vers 0) : $|G_n(z)| = a_n\,|F_n(z)| \leqslant a_n M$. Ceci étant valable pour tout $z \in A$, on a donc $\|G_n\|_\infty \leqslant a_n M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\|G_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis :

$$\boxed{(a_n F_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A}$$

Si on note cette fois $H_k = (a_k - a_{k+1})F_k$, alors $\|H_k\|_\infty = (a_k - a_{k+1})\,\|F_k\|_\infty$, et comme $(\|H_k\|_\infty)$ est convergente, elle est bornée, ce qui fournit une majoration de la forme $\|H_k\|_\infty \leqslant M(a_k - a_{k+1})$, et c'est gagné, car $\sum(a_k - a_{k+1})$ est convergente (toujours le même argument : (a_n) est une suite convergente). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|H_n\|_\infty$ est convergente.

1. Cette bonne blague...

$$\boxed{\sum (a_k - a_{k+1}) F_k \text{ converge normalement sur } A.}$$

(b) Les calculs sont identiques à ceux de la question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n\, f_n$, on trouve :

$$\forall x \in A, \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})\, F_k(x) + a_n\, F_n(x)$$

puis :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})\, F_k + a_n\, F_n.$$

Or, d'après la question 5.a, la série $\sum (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement donc uniformément, donc la *suite* de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})\, F_k$ converge normalement donc uniformément, et celle de terme général $a_n\, F_n$ aussi, donc leur somme aussi. En d'autres termes [2] :

$$\boxed{\sum a_n f_n \text{ converge uniformément sur } A.}$$

2. (a) Une simple factorisation par l'arc moitié donne

$$\boxed{1 - \mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{-ix/2} - \mathrm{e}^{ix/2}) = -2i \sin \tfrac{x}{2}\, \mathrm{e}^{ix/2}}$$

(b) Fixons $a \in]0, \pi[$. Notons A l'intervalle $[a, 2\pi - a]$. Si l'on utilise les notations de la question 5, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in A$:

$$f_n(x) = \sin(nx), \qquad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \qquad \text{et} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Maintenant, on vérifie que :
— la suite (a_n) est décroissante et de limite nulle ;
— la suite (F_n) est uniformément bornée sur A :

$$\forall x \in A\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |F_n(x)| = \left| \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \right| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \right| = \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(a/2)}.$$

D'après la question 5, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $A = [a, 2\pi - a]$.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [a, 2\pi - a].}$$

(Le fait que les sommes commencent à 1 et non à 0 n'a évidemment aucune incidence sur la validité de la transposition des raisonnements...)

(c) Puisque chaque fonction u_n est continue sur $]0, 2\pi[$, le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions montre que la somme U de la série $\sum a_n\, f_n$ est continue sur *chaque* $[a, 2\pi - a]$, donc continue sur $]0, 2\pi[$.

$$\boxed{U \text{ est continue sur }]0, 2\pi[.}$$

(d) Comme dans la question 5.c, il suffit de prouver que la suite (V_n) des sommes partielles de la série $\sum \sin(nx) \sin(px)$ est uniformément bornée, cette fois sur $[0, \pi]$. Or, d'après les calculs déjà faits, on a (attention, on traite à part le cas $x = 0$...)

$$\forall x \in]0, \pi]\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |V_n(x)| \leqslant \frac{|\sin px|}{\sin(x/2)}.$$

L'inégalité gentiment donnée par l'énoncé (et prouvée plus loin) montre que

$$\forall x \in]0, \pi]\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |V_n(x)| \leqslant \pi \frac{|\sin px|}{x} \leqslant p\pi,$$

2. Attention, on passe sans arrêt des suites aux séries et inversement...

en vertu d'une autre inégalité classique : $|\sin t| \leqslant |t|$ pour tout réel t.
Enfin, cette inégalité est également valable pour $x = 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|V_n\|_\infty \leqslant p\pi$$

c'est-à-dire que la suite (V_n) est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.
On en déduit[3] que :

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ converge uniformément sur } [0, \pi].}$$

Pour montrer l'inégalité donnée dans l'énoncé, on peut étudier la fonction différence $x \mapsto \sin \frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}$*, qui s'avère être croissante puis décroissante...*

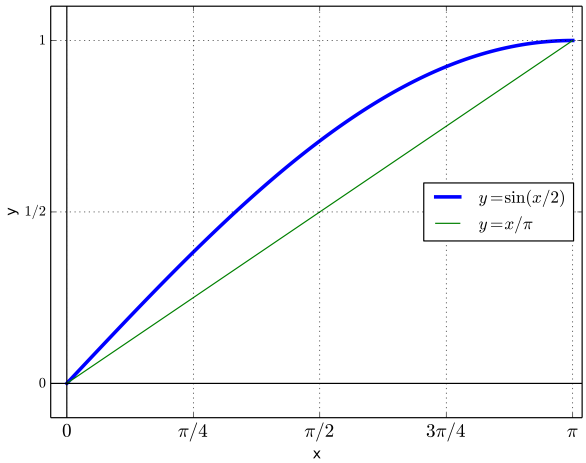


FIGURE 1 – Le graphe est situé dessus la corde

Fondamentalement, « la » bonne explication est la concavité de la fonction $x \mapsto \sin(x/2)$ *sur* $[0, \pi]$.

3 Convergence uniforme d'une série entière

1. J'accepte bien entendu la version réelle :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n\, x^n \text{ converge uniformément sur tout segment } [a, b] \subset]-R, R[}$$

Mais aussi la version complexe

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n\, z^n \text{ converge uniformément sur toute boule fermée } B_f(0, r) \subset B_o(0, R) \text{ (avec donc } r < R).}$$

2. (a) Soit $r > 0$. La suite $\left(\dfrac{r^n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$. En revenant à la définition du rayon de convergence, on obtient donc directement :

$$\boxed{\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}} \text{ a pour rayon de convergence } 1.}$$

(b) Procédons par l'absurde en supposant qu'il y a convergence uniforme sur $]-1, 1[$. Puisque chaque $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque x tend vers 1^-, la convergence uniforme permet d'appliquer le théorème de la double limite :
— la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est convergente ;

3. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ étant toujours décroissante de limite nulle !

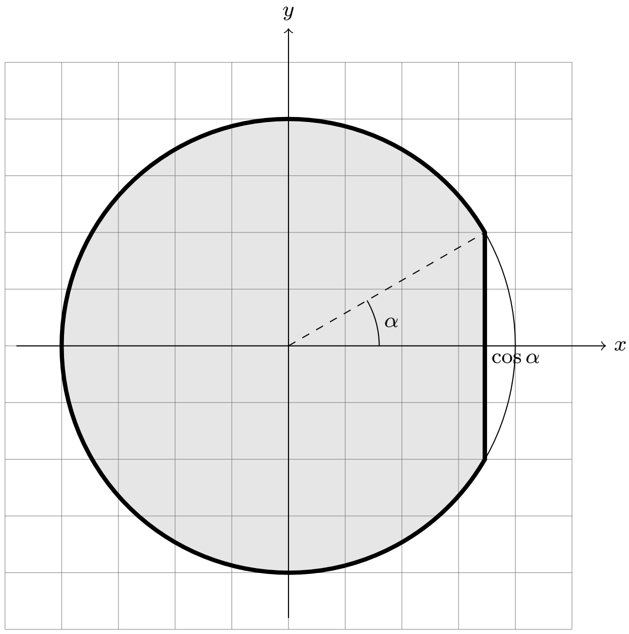
— on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Bien entendu, le premier point est déjà un peu problématique.

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{x^n}{\sqrt{n}} \text{ ne converge pas uniformément sur }]-1,1[.}$$

REMARQUE : En revanche, on montre classiquement que la convergence uniforme a lieu sur $[-1,0]$ par exemple, en contrôlant le reste d'une série alternée à l'aide de son premier terme.

(c) Merci à monsieur Appel pour le joli dessin.



(d) Soit $z \in D_\alpha$. Déjà, coup de chance, on est sûr que $z \neq 1$, ce qui permet de sommer une série géométrique :

$$|F_n(z)| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}.$$

Or $|1-z|^2 = (1-x)^2 + y^2 \geqslant (1-x)^2$. Mais $-1 \leqslant x \leqslant \cos\alpha$, donc $1-x \geqslant 1-\cos\alpha > 0$, donc $|1-z| \geqslant 1-\cos\alpha > 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } z \in D_\alpha, \text{ alors } |F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

La suite (F_n) est donc uniformément bornée sur D_α.

(e) Le fait que (F_n) soit uniformément bornée sur D_α et que la suite de terme général $1/\sqrt{n}$ décroît et converge vers 0 montre (question 5) que :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{z^n}{\sqrt{n}} \text{ converge uniformément sur } D_\alpha, \text{ et ce pour tout } \alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.}$$