À rendre le lundi 5 janvier 2026 dans mon casier.

1 Une somme classique

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q 1. Question préliminaire
Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q 2. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x$.
Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q 3. Déterminer sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$.

Q 4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

Q 5. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x$.

Q 6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q 7. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$.
On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q 8. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.
Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Q 9. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q 10. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$,
$f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q 11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2 Une intégrale classique

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q 12. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

Q 13. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q 14. 1ère tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Q 15. 2ème tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Q 16. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\,\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

Q 17. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Q 18. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q 19. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q 20. Démontrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Q 21. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

Q 22. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q 23. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Q 24. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.
En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q 25. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Q 26. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Q 27. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

FIN