Le corrigé du premier problème est écrit par Bruno Winckler (et retouché par mes soins, essentiellement sur des questions de détails entre les programmes de MP/MPI et PSI). Le corrigé du deuxième problème (également retouché) a été écrit par Stéphane Oiry.

1 Une somme classique

Q 1. *NDSG : voici d'abord une rédaction où on somme en cassant joyeusement $\mathbb{N}^*$ en deux paquets. C'est raisonnable, et licite modulo les théorèmes sur les familles sommables. Sujet délicat qui sera u peu abordé dansle chapitre sur les probabilités :*

Par le théorème de sommation par paquets (qu'on peut utiliser ici sans hypothèse de sommabilité puisqu'on somme des termes positifs), avec le recouvrement $\mathbb{N}\setminus\{0\} = (2\mathbb{N}\setminus\{0\}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\in 2\mathbb{N}\setminus\{0\}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge évidemment (c'est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$), cette égalité peut se réécrire :

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ce dont on déduit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3/4}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

NDSG : plus simplement, on peut considérer $\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2}$ qu'on casse en deux, et noter que quand N tend vers $+\infty$, tous les termes convergent.

Partie I

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)(\sin(x))^n\cos(x)$.

Pour obtenir une relation entre les intégrales $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\mathrm{d}x$ et $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n}\mathrm{d}x$, nous allons intégrer par parties afin d'abaisser le degré de l'exposant $n+2$. Plus précisément : pour obtenir l'exposant n, nous allons dériver $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ et intégrer $x \mapsto \sin(x)$. La formule de l'intégration par parties donne alors :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\mathrm{d}x = \big[-\cos(x)\cdot(\sin(x))^{n+1}\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot(\sin(x))^n\cos(x)\mathrm{d}x,$$

donc : $W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n(\cos(x))^2\mathrm{d}x$. En utilisant la formule : $\cos^2 = 1-\sin^2$, on obtient :

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n\mathrm{d}x - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2}\mathrm{d}x = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2},$$

c'est-à-dire $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, puis :

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$$

On en déduit la relation demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la proposition : « $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. »

— Pour $n = 0$ on a : $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, et : $\dfrac{2^{2\cdot 0}(0!)^2}{(2\cdot 0+1)!} = 1 = W_1$, d'où P_0.

— À présent, si $n \in \mathbb{N}$ est un entier tel que P_n est vérifiée, alors :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

d'où P_{n+1}.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par principe de récurrence on a bien :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

NDSG : un calcul « avec des petits points » passait très bien.

Q 3. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'écrire $x \mapsto \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$: or nous connaissons le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous allons l'utiliser avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et le composer avec $x \mapsto -x^2$, pour obtenir celui demandé. On a, pour rappel :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

NDSG : n'hésitez pas à utiliser la notation $\binom{\alpha}{n}$!

Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x^2 \in]-1,1[$, et on peut donc évaluer en $-x^2$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} \left(-x^2\right)^n.$$

Pour les besoins de la question suivante, nous allons simplifier le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a : $\left(-x^2\right)^n = (-1)^n x^{2n}$, on en déduit :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.}$$

NDSG : pitié, utilisez des petits points !

Passons à l'arc sinus. On a :

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \mathrm{d}t.$$

Or la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ est de rayon de convergence 1, donc on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment inclus dans $]-1,1[$. On en déduit :

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.}$$

NDSG : on aura noté qu'il n'est pas question de je ne sais quelle primitive formelle $\displaystyle\int \dots\, dx$ mais bien d'une intégrale $\displaystyle\int_0^x \dots\, dt$

Q 4. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En posant $x = \sin(t) \in [0,1[$ dans le développement en série entière de l'arc sinus, on obtient :

$$\operatorname{Arcsin}(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(t))^{2n+1}}{2n+1},$$

et $\operatorname{Arcsin}(\sin(t)) = t$ car $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où le résultat désiré (quitte à renommer t en x).

Q 5. Il s'agit de justifier l'interversion des symboles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}$. Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme positif. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

L'application g_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc elle y est intégrable et elle est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus elle est positive sur cet intervalle et sa somme est continue (c'est la fonction $x \mapsto x$ d'après la question précédente), donc par le théorème d'intégration terme à terme positif on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n$$

ce qui donne immédiatement le résultat voulu.
NDSG : on pouvait ausi utiliser la convergence normale de $\sum g_n$... pour peu qu'on estime effectivement $\|g_n\|_\infty$: toute affirmation de convergence normale qui n'est pas précédée par une telle évaluation va forcément directement à la poubelle !

Q 6. D'après la question 2 on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1}\,\mathrm{d}x = W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Donc par la question précédente et la question 4 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or on a facilement : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$. Donc : $\displaystyle\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

On conclut avec la question 1, et on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie II

Q 7. Soit $x \in]-1,1[$. On a : $|x^2| < 1$, donc :

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$$

On a donc : $\displaystyle\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln(x))$ pour tout $x \in [0,1[$, puis :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x,$$

pour peu qu'on justifie l'interversion $(*)$

- Chaque fonction $f_n : x \mapsto -x^{2n}\ln(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement et sa somme qui vaut $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$, est bien continue sur $]0,1[$.
- Il reste à justifier l'intégrabilité sur $]0,1[$ de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela équivaut à la convergence de son intégrale sur $]0,1[$) puis la convergence de $\sum \int_0^1 |f_n|$; nous allons faire mieux en calculant l'intégrale sur $]0,1[$ de f_n en même temps, *via* une intégration par parties, où l'on dérive $x \mapsto -\ln(x)$ et intègre $x \mapsto x^{2n}$. Puisque

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x) = 0,$$

la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 -x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 -\frac{x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x$ sont de même nature (donc convergentes, puisque la seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), et on a :

$$\int_0^1 -x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

ce qui montre à la fois l'intégrabilité de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $]0,1[$, et que son intégrale égale $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$. On en déduit pour le même prix la convergence de $\sum \int_0^1 |f_n|$.

NDSG : on pouvait aussi réaliser l'IPP sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ et constater que tout converge quand ε tend vers 0^+.

En conclusion, on a montré :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.}$$

Q 8. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (x,t)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad g(x,t)=\frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{1+t^2}.$$

Alors :

- pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'application $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $(t,x)\in(\mathbb{R}_+)^2$, on a :

  $$|g(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}\qquad\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}$$

  et l'application $\varphi : t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle est continue sur cet intervalle, et que $|\varphi|=\varphi$ admet comme primitive l'arc tangente, qui admet une limite finie (égale à $\dfrac{\pi}{2}$) en $+\infty$.

  NDSG : ou encore : $\varphi(t)\sim\dfrac{1}{t^2}$ *donc* φ *est intégrable au voisinage de* $+\infty$.

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, d'une part $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, et d'autre part :

$$\boxed{f\text{ est définie et continue sur }\mathbb{R}_+.}$$

Q 9. On reprend les notations de la question précédente. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et on a :

  $$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+\times]0,1],\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}\ ;$$

- pour tout $x\in]0,1]$, l'application $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente ;
- pour tout $x\in]0,1]$, l'application $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,1]$ et tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times[a,b]$, on a :

  $$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}\qquad\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}$$

  Justifions que l'application $\varphi : t\mapsto\dfrac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: elle est continue sur cet intervalle, et on a : $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{t^3}$, donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment de $]0,1]$, d'une part $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in]0,1]$, et d'autre part :

$$\boxed{f\text{ est de classe }\mathcal{C}^1\text{ sur }]0,1]\text{ avec pour tout }x\in]0,1] : f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t}$$

Q 10. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1[$. On a :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2} = \frac{t(1+t^2x^2) - x^2t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = (1-x^2)\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

et on en déduit, par la question précédente :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2x^2)}{2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^2x^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2(1-x^2)} = -\frac{\ln(x)}{1-x^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à multiplier par -1 le dénominateur.

Q 11. On a immédiatement :

$$\boxed{f(0) = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0 \text{ et } f(1) = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}\cdot}$$

Or en intégrant la relation de la question précédente, on a l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = c + \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

Calculons la limite de chaque membre en 0. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$ converge par la question 7, on a : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t = 0$. De plus f est continue en 0 par la question 8, donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Ainsi l'égalité ci-dessus donne, quand $x \to 0$:

$$0 = c.$$

Cette même égalité donne, quand $x \to 1$, toujours par continuité de f :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = f(1) = \frac{\pi^2}{8}\cdot$$

On en déduit, par la question 7 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\cdot$$

On conclut avec la question 1, et on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

2 Une intégrale classique

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q 12.
- La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- En 0, on a $\varphi(t) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ qui est intégrable au voisinage de 0 car $1-\alpha < 1$, donc la fonction φ est intégrable sur $]0,1]$.
- En $+\infty$, on a $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ car $2-\alpha > 1$, donc la fonction φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q 13. On a $I(1-\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x$; le changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$ (bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$) fournit alors

$$\boxed{I(1-\alpha) = \int_{+\infty}^1 \frac{u^\alpha}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u = J(\alpha)}$$

Q 14. Pour x fixé dans $]0,1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x)| < 1$, la série est donc convergente, avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$.

Supposons que la série converge uniformément sur $]0,1[$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} (-1)^n$, le théorème de la double limite entraînerait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ converge... ce qui n'est pas le cas.

$$\boxed{\text{La série ne converge pas uniformément sur }]0,1[.}$$

Q 15. Comme $S_n(x) = x^{\alpha-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

On note $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \varphi_n(x)$ est continue sur $[0,1]$.
- $\forall x \in]0,1[$, $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) = 0$ et φ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $|\varphi_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \times 2$ et la fonction $x \mapsto 2\,\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = I(\alpha)}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$, on peut faire tendre n vers $+\infty$:

$$\boxed{I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}}$$

Q 16. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha)+J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}I(\alpha)+J(\alpha) = I(\alpha)+I(1-\alpha) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k}\\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{-\alpha+n}\right)\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{I(\alpha)+J(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.}$$

Q 17. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q 18. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

— ψ_x est continue sur $]0, +\infty[$.

— $\psi_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc ψ_x est intégrable au voisinage de 0.

— $t^2\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc ψ_x est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Finalement, ψ_x est intégrable sur $]0, +\infty[$, et ainsi :

$$\boxed{\Gamma \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[.}$$

Q 19.

- Pour $x = 0$, on retrouve $f_\alpha(0) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ d'après la question 14.
- Soit $x > 0$:

  — $\mu : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

  — $\mu(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et on donc μ est intégrable au voisinage de 0.

  — $t^2\mu(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\mu(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc μ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

  μ est finalement intégrable sur $]0, +\infty[$, donc $f_\alpha(x)$ existe.

Ainsi :

$$\boxed{f_\alpha \text{ est bien définie sur } [0, +\infty[.}$$

Démontrons maintenant que f_α est continue sur $[0, +\infty[$.

On note λ la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $\lambda : (x, t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{e}^{-xt}$

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \lambda(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto \lambda(x, t)$ est continue par morceaux (car continue) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|\lambda(x, t)| \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 9.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres :

$$\boxed{\text{La fonction } f_\alpha \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

NDSG : le théorème de continuité utilisé inclut la définition de f_α dans ses conclusion.

Q 20. Soient a et b réels tels que $0 < a < b$. On conserve la notation de λ de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a, b]\times]0, +\infty[$

- $\forall x \in [a,b]$, $t \mapsto \lambda(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 16 (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).
- $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto \lambda(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
- $\forall x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^\alpha}{1+t}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^\alpha}{1+t}\mathrm{e}^{-at}$ et $t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}\mathrm{e}^{-at}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et c'est un $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Ceci étant pour tout a et b de $]0,+\infty[$, on en conclut :

$$\boxed{f_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{, et pour tout } x>0,\ f_\alpha'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t}$$

NDSG : Le théorème au programme permet de conclure au caractère $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ sans passer par le caractère $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[a,b]$.

Q 21. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisé (avec un paramètre réel, pas forcément entier).

Soit $x>0$, on note $\lambda_x : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{e}^{-xt}$ définie sur $]0,+\infty[$.

- $\forall x > 0$, $t \mapsto \lambda_x(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- $\forall t \in]0,+\infty[$, $\lambda_x(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda(t) = 0$ et $t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- $\forall (x,t) \in (]0,+\infty[)^2$, $|\lambda_x(t)| \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (vu à la question précédente).

Donc par théorème de convergence dominée généralisé :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \lambda_x(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

Q 22. La fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $\psi(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc ψ est intégrable au voisinage de 0, et $t^2\psi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Ainsi :

$$\boxed{t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

On a pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
L'intégrale étant convergente, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q 23. Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{t+1} \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

Le changement de variable linéaire $u = xt$ fournit alors :

$$\boxed{f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} \mathrm{e}^{-u} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}}$$

NDSG : pour un changement de variable affine dans une intégrale impropre, inutile dans faire des caisses, mais signaler le mot « affine » (ou « linéaire » ici) et éventuellement préciser « dans l'intégrale convergente... »

Q 24. *Calcul préliminaire :* on note $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$. On a g qui est définie d'après la question 19 et de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^\alpha}\cdot$ g_α est donc de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t + \Gamma(\alpha)\mathrm{e}^x \left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^\alpha}\right) = g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}\cdot$$

Ainsi :

$$\boxed{g_\alpha \text{ est une solution particulière de l'équation différentielle } y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}\cdot}$$

Considérons l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ pour $x > 0$

- L'équation sans second membre associée est $y' - y = 0$ dont les solutions sont les $x \mapsto k\,\mathrm{e}^x$ où k décrit $\mathbb{R}$.
- Comme g_α est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont les $x \mapsto k\,\mathrm{e}^x + g_\alpha(x)$ où k décrit $\mathbb{R}$.

f_α étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = k\,\mathrm{e}^x + g_\alpha(x)$. Il reste à déterminer la valeur de k.

On a de l'équation précédente l'égalité $\mathrm{e}^{-x} f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$. En utilisant les résultats des questions 18 et 19, on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ que $k = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x)}$$

Q 25. *En posant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour $x > 0$.*

On sait d'après la question 16 que f_α est continue sur $[0, +\infty[$ donc en particulier en 0 :

$$f_\alpha(0) = \lim_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x \to 0^+} g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

D'autre part, comme $f_\alpha(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, \mathrm{d}t$, on obtient l'égalité demandée.

Q 26. On sait d'après la question 14 que $f_\alpha(0) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\cdot$ Avec l'égalité de la question précédente, on a donc :

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)}$$

Q 27. On pose $u = t^2$ dans l'intégrale (bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même), et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$.

On en déduit que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive), et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

FIN