Samedi 10 janvier 2026 – calculatrices interdites

Ce sujet est constitué de 3 problèmes indépendants. Il est probablement un peu (très !) long, mais ne vous inquiétez pas : essayez de faire des choses substantielles sur au moins deux des trois problèmes.

1 Problème 1 : E3A 2023 (exercice 4)

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{i\theta}$.
2. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.
   3.1 Justifier que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.
   3.2 Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ converge.
   Sa somme sera notée T_p.
   3.3 Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
   3.4 Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.
4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que la fonction $x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.
   On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*****

5. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\phi'(x)\mathrm{e}^{i\phi(x)}$.
   5.1 Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.
   5.2 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,
   $$F'(x) = \frac{i\mathrm{e}^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u.$$
6. **Convergence d'intégrales**
   6.1 Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.
   6.2 En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.
   6.3 En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

6.4 Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iv^2}\mathrm{d}v$ converge.

On pourra effectuer un changement de variable.

7. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

7.1 Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

7.2 On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.
Prouver que α_n est un réel strictement positif.
On pourra effectuer sur w_n le changement de variables affine $t = u - n\pi$.

7.3 Prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

7.4 Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.

On pourra utiliser les questions de cours.

7.5 Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

8. Montrer que, pour tout réel x positif :

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2.$$

9. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

On pourra utiliser la question 6.

2 Problème 2 : E3A 2024 (exercice 2)

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$: $\mathrm{Min}(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α, l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.

2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$. Justifier que la fonction $H \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et déterminer sa dérivée.

*****

3. **Cas particuliers**

3.1 Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

3.2 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, t\right)\mathrm{d}t$.

3.3 Soit x un réel de $[0,1]$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}(x,t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de x.

4. Soit $f \in E$.

4.1 Justifier que $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}(x,t)\,f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.

4.2 Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.

4.3 Démontrer alors que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E, on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^1 \operatorname{Min}(x,t)\, f(t) \mathrm{d}t.$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.
6. L'application T est-elle injective ?
7. On pose $A = \{G \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid G(0) = G'(1) = 0\}$.

   7.1 Montrer que $\operatorname{Im}(T) \subset A$.

   7.2 Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.

   7.3 Déterminer $\operatorname{Im}(T)$.
8. **Recherche des éléments propres de T**

   8.1 Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. *On pourra utiliser la question* **4.**

   8.2 Déterminer les valeurs propres de T. *On pourra aussi utiliser la question* **4.**

   8.3 Pour chaque valeur propre de T, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

3 Problème 3 : E3A 2024 (exercice 4)

1. Soit n un entier supérieur à 2.

   On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \mathrm{d}t$.

   1.1 Soit α un réel strictement positif.

   1.1.1 Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto (1+h)^\alpha$.

   1.1.2 En déduire un équivalent, au voisinage gauche de 1, de $t \mapsto 1 - t^\alpha$.

   1.2 Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

   Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta} \mathrm{d}t$ converge.

   1.3 Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geq 2$.
2. **Démonstration d'un encadrement**

   2.1 Démontrer que l'on a :

   — pour tout réel t : $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$;

   — pour tout réel t négatif : $\mathrm{e}^t \leqslant 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$.

   2.2 On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}$.

   Soit p un entier naturel non nul. On suppose que pour tout $u \leqslant 0$, $U_{2p-1} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}$.

   2.2.1 Démontrer que pour tout $u \leqslant 0$, $U_{2p+1} \leqslant \mathrm{e}^u$.

   2.2.2 Démontrer également que pour tout $u \leqslant 0$, $\mathrm{e}^u \leqslant U_{2p+2}$.

   2.3 En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de e^u lorsque u est un réel négatif ou nul.
3. Démontrer que l'on a, pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $p \geq 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n} \ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k.$$

4. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t$ existe.
5. Démontrer que l'on a pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t.$$

6. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t\right)$.

   Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.
7. Prouver alors que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n\gamma_n) = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.
8. Prouver que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t$ existe.
9. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel p : $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}\cdot$
10. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)^2}\cdot$
11. Prouver enfin que : $\displaystyle\gamma_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\cdot$

    On admettra que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

FIN