

A 2007 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de \mathbb{C}^n dont les composantes dans la base canonique de \mathbb{C}^n sont les coefficients de la matrice X . Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note \overline{M} l'endomorphisme canoniquement associé de \mathbb{C}^n : \overline{M} est l'endomorphisme de \mathbb{C}^n dont M est la matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^n . Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme \overline{M} .

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$ et pour $k = 0, \dots, n-1$, on appelle k -ième diagonale supérieure de M , notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i, i+k}, i = 1, \dots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de \mathbb{C}^n , on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de \mathbb{C}^n , on note u_V sa restriction à V .

De sorte que si i_V représente l'injection de V dans \mathbb{C}^n , $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout $y \in V$.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définition 1 Soit \mathcal{U} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent \mathcal{U} . On dit que \mathcal{U} est une algèbre de Lie lorsque

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit \mathcal{U} et \mathcal{V} deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans \mathcal{V} et si A est une matrice dans \mathcal{U} alors AX est soit la matrice colonne nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans \mathcal{V} . De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans \mathcal{V} , et soit A une matrice de \mathcal{U} .

- 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur \mathcal{V} , à valeurs dans \mathbb{C} , telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.
- 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à \mathcal{V} .

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = AX_k, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]), \text{ pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

- 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^i C_i^j \lambda_{i-j}(M) X_j \quad (1)$$

$$[M, A]X_i = \sum_{j=0}^i C_i^j \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \quad (2)$$

- 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de \mathbb{C}^n . Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_q\}$.

- 5 - Montrer que \overline{M}_G , \overline{A}_G et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G .
- 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]}_G$.
- 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_q\}$?
- 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?
- 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 Soit \mathcal{U} une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que \mathcal{U} est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ telles que :

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \dots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \quad (\text{A})$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, p-1\}. \quad (\text{B})$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 \mathcal{U} est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et \mathcal{T}_P l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

- 10 - Traduire la propriété « il existe une matrice P inversible telle que pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de \mathcal{U} .
- 11 - Montrer que \mathcal{T}_P est une algèbre de Lie résoluble de longueur n .

On pourra considérer les sous-espaces \mathcal{N}_k ($0 \leq k \leq n$) tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k ($1 \leq k \leq n$), \mathcal{N}_k est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, ..., et $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que \mathcal{U} est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

- 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.
- 13 - Soit r un entier non nul et une famille M_1, M_2, \dots, M_r d'éléments de \mathcal{U} . Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_r$.
- 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M}, M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M}, M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux espaces supplémentaires de \mathbb{C}^n et u et v deux endomorphismes de \mathbb{C}^n . De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

- 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H.$$

- 16 - Montrer que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent puis que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ commutent.

- 17 - En procédant par récurrence sur n , établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, \mathcal{U} une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p , il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

- 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}, M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \dots \overline{A_k} X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j .

- 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

- 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

- 21 - Que peut-on en déduire?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnements qu'aux questions 14 et 17.

FIN DU PROBLÈME

1.2 D - MATHÉMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GÉNÉRALES

Le problème introduit la notion d'algèbre de Lie. Son objectif est d'établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre de Lie soit résoluble. Le résultat obtenu en première partie est utilisé en seconde.

Le problème exige une bonne connaissance des notions fondamentales d'algèbre linéaire : base d'un espace vectoriel, endomorphismes, vecteurs propres etc., aussi bien qu'une maîtrise suffisante des techniques, telles que le calcul matriciel.

La première partie est assez simple. Pour résoudre quelques questions, il suffit d'appliquer directement les théorèmes de base du cours. Toutefois beaucoup des candidats se sont trouvés en difficulté même avec ses questions.

Quelques questions en seconde partie exigent une certaine réflexion. On note avec satisfaction que ces types de questions ont été résolus par un nombre significatif des candidats. Il y a des copies dans lesquelles le problème est pratiquement mené à terme. Bien que le problème ne soit pas trop long, quelques copies qui manifestent une bonne connaissance du cours restent inachevées faute de temps.

II) REMARQUES PARTICULIÈRES

1) Beaucoup de candidats ont présenté une définition correcte de l'application λ mais n'ont pas montré sa linéarité.

2) Une des questions les plus simples. Les erreurs y sont rares, mais certains candidats ont fondé la démonstration sur la fausse (en général) inclusion $M, A \in V$. Voir aussi la remarque à propos de la question 19.

3) Cette question exige un certain calcul, y compris un changement des indices et l'application de la formule du triangle de Pascal. Beaucoup n'ont pas réussi à la mener à terme correctement.

4) Dans quelques copies il manque l'argument clef, notamment la finitude de la dimension de C^n . Parfois on lit aussi que $\dim C^n = 2n$ ou $\dim C^n = n^2$. Ces erreurs, bien que n'influencant pas le raisonnement dans cette question particulière, démontrent une faible connaissance des notions principales.

5) Un certain nombre de candidats a passé trop de temps sur la démonstration des propriétés évidentes (la linéarité de M_g etc.) mais a manqué de justifier la stabilité de G par rapport à ces applications, ce qui est essentiel dans cette question.

6) Au lieu du résultat correct $tr(\overline{[M, A]}_G) = 0$, plusieurs candidats ont présenté une formule pour la trace de la matrice, ce qui les a empêchés de bien traiter les questions suivantes. Certains d'entre eux ont révisé cette question et l'ont bien traitée après s'être heurtés aux difficultés de la question 8.

7) Une question bien traitée par la plupart des candidats. Certains candidats ont écrit correctement la formule pour les éléments de la matrice de $\overline{[M, A]}_G$ mais n'ont pas indiqué que cette matrice est triangulaire supérieure.

8) Il suffit de rassembler les résultats des questions 6 et 7. Néanmoins, même parmi ceux qui avaient bien traité les deux questions précédentes, certains ne sont pas arrivés au résultat correct $\lambda(\overline{[M, A]}) = 0$.

9) Dans la plupart des cas, cette question est bien traitée par ceux qui ont obtenu les résultats corrects aux trois questions précédents.

10) Une question où la rigueur de la rédaction est particulièrement importante. On voit souvent une traduction de la sorte "pour tout endomorphisme \bar{M} associé il existe une base en laquelle \bar{M} est triangulaire supérieur". Cela manque l'essentiel, à savoir que cette base est commune pour tous les endomorphismes associés.

11) Dans cette question, il faut appliquer avec soin les règles du calcul matriciel pour démontrer que $N_k \in N_{k+1}$. Beaucoup des copies contiennent une démonstration détaillée des assertions évidentes (par exemple, que N_k est un espace linéaire) mais manquent l'essentiel. Le cas $k = 0$ (c'est à dire $N_0 \in N_1$) doit être considéré séparément ; cela n'a été fait que dans peu des copies. Très souvent on rencontre des tentatives d'une fausse application des règles de multiplication par blocs.

12) Une question en général bien traitée.

13) Un certain nombre de candidats a essayé de "démontrer" l'affirmation fausse suivante : « tout un vecteur propre de \bar{M}_1 est aussi un vecteur propre de \bar{M}_2 ». D'autres ont obtenu le résultat pour le cas de deux endomorphismes, mais n'ont pas pu passer au cas général.

14) Au lieu de considérer une base de l'espace U et utiliser le résultat de la question 13, beaucoup de candidats ont appliqué directement la récurrence à l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace U . Rappelons que la méthode de la récurrence ne s'applique qu'aux ensembles finis. Les tentatives de la démonstration par l'absurde sont aussi inutiles dans ce cas.

15) Une question bien traitée par la plupart des candidats. Cependant, on y rencontre parfois des fausses implications, telles que $p_H u p_H = p_H u p_H^2 \Rightarrow p_H u = p_H u p_H$. Puisque p_H est un endomorphisme irréversible, il est impossible d'en "réduire".

16) La première partie de cette question a rarement posé de difficultés. Mais le traitement de la seconde partie montre que plusieurs candidats ne comprennent pas la définition de la restriction. Plus précisément, le fait que les applications u_H et v_H ne sont définies que sur H . En particulier, l'expression $u_H v_H$ n'a pas de sens car v_H peut prendre des valeurs en dehors de H .

17) Cette question demande une application raisonnable des réponses à une série des questions précédentes. Ceux qui l'ont abordé présentent souvent les points principaux du raisonnement mais parfois manquent de précision.

18) Cette question n'a pas posé généralement des difficultés aux candidats qui avaient présenté le résultat de la question 10 avec précision.

19) Beaucoup des candidats qui ont traité cette question ont montré que les éléments de la base de E sont des vecteurs propres communs à \bar{U}_1 mais ont manqué de préciser que ces vecteurs propres sont associés à la même valeur propre. C'est cela qui permet de passer des éléments de la base à tous les éléments de l'espace vectoriel E . Certains candidats ont lu la définition d'une algèbre de Lie sans beaucoup d'attention et ont cru qu'une algèbre de Lie était forcément une algèbre. (Notons que si c'était vrai, la propriété de la stabilité par l'opération des crochets de Lie aurait été superflue.)

20) En calculant la trace, beaucoup des candidats ont oublié de citer le résultat de la question 19, à savoir, le fait que E est stable par \bar{M} et \bar{M}' .

21) Certains candidats se sont restreints au résultat formel $[\bar{M}, \bar{M}']_E = 0$ sans présenter la conclusion que tous les éléments de U , en restriction à E , commutent deux à deux.

III) CONCLUSION

Une cause assez répandue des erreurs est une compréhension incorrecte des notations. Il faut lire l'énoncé très attentivement.

Nous recommandons aux candidats futurs de s'entraîner à rédiger avec précision et rigueur. Chaque étape d'une démonstration doit être bien justifiée. Il est souvent impossible de comprendre si un candidat n'a pas cité une condition importante par négligence ou par ignorance. Par ailleurs, l'omission de détails qui peuvent sembler insignifiants, aboutit parfois à un faux raisonnement.

Une bonne maîtrise des techniques de base est d'une très grande importance. Par exemple, pour résoudre plusieurs questions il suffit de savoir correctement étendre une propriété "linéaire" d'une base de l'espace vectoriel à l'ensemble de tous les éléments de cet espace. Pour atteindre cet objectif, la pratique régulière est indispensable.