Ce corrigé est écrit par Philippe Ducrot – et retouché à la marge par mes soins.

1 Problème 1 : E3A 2023 (exercice 4)

Questions de cours

1. Que dire ?

$$\boxed{\text{Le module de } \mathrm{e}^{i\theta} \text{ vaut 1, et un argument est } \theta.}$$

2. Par disjonction de cas sur la parité de n, ou bien via $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ suivie d'une récurrence (exceptionnellement) immédiate, ou encore en passant par $\mathrm{e}^{i(n\pi+t)} = \left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^n \mathrm{e}^{it}$...

3. 3.1 La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial de convergence des séries alternées : la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

   3.2 Les sommes partielles de cette série diffèrent des sommes partielles de la précédente d'une constante additive. Puisque la précédente converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq p}(-1)^n a_n \text{ converge.}}$$

   3.3 T_{p+1} est le reste d'indice p de la série convergente $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (T_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite 0.}}$$

   3.4 Conséquence du CSCSA (dont les trois hypothèses sont bien vérifiées !) :

$$\boxed{T_p \text{ est du signe de son premier terme, soit du signe de } (-1)^p.}$$

4. Notons g une primitive de f sur $\mathbb{R}$: g est une fonction dérivable, dont la dérivée est f. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t = g(\sqrt{x}) - g(0)$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t$ est donc à constante additive près la composée de g et de la fonction racine carrée, elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0, \text{ sa dérivée en } x \text{ vaut } \frac{1}{2\sqrt{x}}g'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x}).}$$

5. 5.1 On applique ici le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale.

   — Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.

   — Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto i\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}$.

   — Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto i\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.

   — Pour tout couple $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R}$, $\left|i\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}\right| = 1$, et la fonction $t \mapsto 1$, indépendante de x, est intégrable sur le segment $[0,1]$.

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et, pour tout réel } x,\ F'(x) = \int_0^1 i\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}\mathrm{d}t.}$$

5.2 Pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = i\mathrm{e}^{ix} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt^2}\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable linéaire $u = \sqrt{x}\, t$ dans l'intégrale (sur un segment, donc pas de commentaires !), et on obtient :

$$\boxed{F'(x) = \frac{i\mathrm{e}^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u.}$$

6. **Convergence d'intégrales**

6.1 Les fonctions $\varphi_1 : u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ et $\varphi_2 : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$ sont définies et continues sur $]0, \pi]$.

— La première se prolonge en une fonction continue en 0 donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

— La seconde est équivalente en 0 à $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ qui est intégrable (au voisinage de 0 bien entendu), donc φ_2 est intégrable au voisinage de 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

6.2 Puisque $\dfrac{-i\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}$ admet une limite finie en $+\infty$, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{i\mathrm{e}^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ sont de même nature. Or $\left|\dfrac{i\mathrm{e}^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\right| = \dfrac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$, et ainsi :

$$\boxed{\int_\pi^{+\infty} \frac{i\mathrm{e}^{iu}}{2u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \text{ converge, donc } \int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \text{ également.}}$$

NDSG : pour l'IPP, on peut passer par le segment $[\pi, X]$. Sinon, je conseillerais quand même de parler de u, u', v et v', et dire que uv possède une limite en $+\infty$.

6.3 Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, car $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge comme combinaison linéaire des deux intégrales étudiées à la question 6.1, et donc avec la question 6.2 :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

6.4 L'application $v \mapsto v^2$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, donc les intégrales avant et après changement de variable $u = v^2$ sont de même nature ; à savoir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iv^2}\mathrm{d}v$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}\cdot$ Cette dernière étant convergente, la première l'est aussi.

NDSG : pour un changement de variable dans une intégrale sur autre chose qu'un segment, vous êtes priés de faire le minimum syndical, en signalant que « le changement de variable », c'est-à-dire ici $v \mapsto v^2$ ou bien $u \mapsto \sqrt{u}$ constitue une bijection $\mathcal{C}^1$ entre tel et tel intervalle.

7. 7.1 w_0 a été étudiée en 6.1, les autres sont des intégrales d'une fonction continue sur des segments.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n \text{ existe.}}$$

7.2 Par le changement de variable indiqué, $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t + n\pi)}{\sqrt{t + n\pi}}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\pi}}\mathrm{d}t$, et l'application $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\pi}}$ est **continue**, positive sur $[0, \pi]$, et non nulle (en $\pi/4$) donc :

$$\boxed{\alpha_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\pi}}\mathrm{d}t \text{ est un réel \textbf{strictement} positif.}}$$

7.3 Pour tout entier naturel n, et tout réel $t \in [0,\pi]$, $\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leqslant \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}$. Par croissance de l'intégrale, $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi la suite } (\alpha_n)_n \text{ est décroissante.}}$$

7.4 D'après ce qui précède, la série $\sum_n w_n$ est une série alternée et, pour appliquer le critère spécial, il suffit de vérifier que (α_n) converge vers 0 en décroissant. Le deuxième point est acquis d'après la question précédente. Par ailleurs $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Gagné !

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} w_n \text{ converge, et le signe de sa somme est celui du premier terme de la série, à savoir positif.}}$$

7.5 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, comme partie imaginaire de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$.

Pour tout entier naturel N, par la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} w_n = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, ce qui donne par passage à la limite quand $N \to \infty$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.}$$

8. Pour tout réel $x > 0$, notons $G(x) = i\left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$. D'après la question 4, G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $G'(x) = 2i\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{2\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u = F'(x)$, donc il existe un réel K tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = G(x) + K$. On a alors $K = F(0) - G(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ F(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2.}$$

9. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u$ converge, d'après la question 6, par passage à la limite dans la formule précédente, et en admettant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, il vient : $0 = \dfrac{\pi}{4} + i\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$, donc $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2 = i\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}\mathrm{e}^{i\pi/2} = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\right)^2$, puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\pi/4} = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot$

Ensuite, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$ convergent comme partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iu^2}\mathrm{d}u$ donc il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \varepsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot$

Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ est un réel positif d'après la question 7, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot}$$

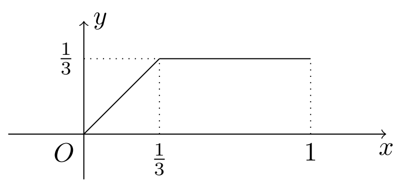
Il s'agit des intégrales de Fresnel.

2 Problème 2 : E3A 2024 (exercice 2)

Questions préliminaires

1. On discute selon le signe de α :
   - Si $\alpha > 0$: on peut écrire $\alpha = -\omega^2$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$; la solution générale s'écrit alors
   $$y \ : \ t \in \mathbb{R} \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels arbitraires.}$$
   - $\alpha = 0$: la solution générale s'écrit alors
   $$y \ : \ t \in \mathbb{R} \mapsto At + B, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels arbitraires.}$$
   - Si $\alpha > 0$: on peut écrire $\alpha = \omega^2$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$; la solution générale s'écrit alors
   $$y \ : \ t \in \mathbb{R} \mapsto \cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t), \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels arbitraires.}$$
2. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, H est la primitive nulle en a de la fonction continue h. À ce titre :
   $$\boxed{H\text{est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1], \text{ et sa dérivée est la fonction } h.}$$
3. **Cas particuliers**

   3.1 La fonction est aussi définie par $t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{3} & \text{sinon} \end{cases}$. D'où le graphe :



   3.2 On utilise la relation de Chasles :
   $$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, t\right) \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, t\right) \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^1 \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{3}} t \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}.\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{18} + \frac{2}{9} \end{aligned}.$$
   $$\boxed{\int_0^1 \mathrm{Min}\left(\frac{1}{3}, t\right) \mathrm{d}t = \frac{5}{18}}$$

   3.3 Plus généralement, toujours avec la relation de Chasles :
   $$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{Min}\,(x,t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \mathrm{Min}\,(x,t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \mathrm{Min}\,(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t + \int_x^1 x\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + x.(1-x) = \frac{x^2}{2} + x - x^2 \end{aligned}.$$
   $$\boxed{\int_0^1 \mathrm{Min}\,(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{x(2-x)}{2}}$$

4. 4.1 Tout d'abord, pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto \mathrm{Min}\,(x,t)$ est définie et continue sur $[0,1]$, donc il en est de même de $t \mapsto \mathrm{Min}\,(x,t)\,f(t)$, et l'intégrale $\mathrm{Min}\,(x,t)\,f(t)$ existe :
   $$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est bien définie sur } [0,1].}$$
   Ensuite, par la relation de Chasles, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \mathrm{Min}\,(x,t)\, f(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 \mathrm{Min}\,(x,t)\, f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}.$$

— La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$ étant la primitive nulle en 0 de $t \mapsto t f(t)$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et a pour dérivée $x \mapsto x f(x)$.

— La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x -f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive nulle en 1 de $t \mapsto -f(t)$; elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et a pour dérivée $-f$.

Ainsi :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et, pour tout } x \in [0,1],\ F'(x) = x f(x) + \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - x f(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.}$$

4.2 D'après la définition de F et ce qui précède :

$$\boxed{F(0) = F'(1) = 0}$$

4.3 D'après l'expression de F' obtenue à la question 4.1 (et à nouveau avec le théorème fondamental de l'analyse) :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,1] \text{ et } F'' = -f.}$$

5. T est linéaire, essentiellement par linéarité de l'intégrale, et, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est la fonction F étudiée à la question 4, qui est en particulier continue sur $[0,1]$. Donc :

$$\boxed{T \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$$

NDSG : pour rappel, endomorphisme = endo (va de E dans E) + morphisme (linéarité).

6. Si $f \in E$ vérifie $T(f) = 0$ alors $T(f)''$ est aussi la fonction nulle. Or, d'après la question 4.3, $T(f)'' = -f$, donc f est la fonction nulle, et ainsi $\mathrm{Ker}\,(T) = \{0_E\}$ et donc :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme injectif de } E.}$$

7. 7.1 C'est le résultat des questions 4.3 et 4.2.

7.2 D'après la question 4.1, pour tout $x \in [0,1]$ (en intégrant par parties le premier terme) :

$$\begin{aligned} T(G'')(x) &= \int_0^x t G''(t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 G''(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[tG'(t)\right]_0^x - \int_0^x G'(t)\mathrm{d}t + x\left[G'(t)\right]_x^1 \\ &= xG'(x) - (G(x) - G(0)) + x(G'(1) - G'(x)) \\ &= -G(x) \end{aligned}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{T(G'') = -G}$$

7.3 Soit $G \in A$. D'après la question précédente, $G = T(-G'') \in \mathrm{Im}(T)$. On a donc $A \subset \mathrm{Im}(T)$ et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(T) = A}$$

8. **Recherche des éléments propres de T**

8.1 D'abord, la question 6 permet d'affirmer que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est non nulle.

Supposons ensuite par l'absurde que T admette une valeur propre λ strictement négative, et notons $f \in E$ un vecteur propre associé. Puisque $T(f)'' = -f$, et $T(f) = \lambda f$, alors f est solution de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\omega^2 = -\dfrac{1}{\lambda}\cdot$

Il existe donc deux réels A et B tels que, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t)$.

Or $f = \dfrac{1}{\lambda}T(f)$, donc $f(0) = f'(1) = 0$, ce qui s'écrit (après division par ω qu'on sait non nul dans la deuxième équation) :

$$\begin{cases} A & = 0 \\ -A\sinh(\omega) + B\cosh(\omega) & = 0 \end{cases}$$

or $\cosh(w) \neq 0$ donc $A = B = 0$, donc $f = 0$, ce qui n'est bien sûr pas possible. On a donc prouvé :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } T\text{, alors } \lambda \text{ est un réel strictement positif.}}$$

8.2 — **Analyse :** Soit λ est une valeur propre de T. D'après la question précédente, il existe un réel $\omega > 0$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}\cdot$ Prenons alors f un vecteur propre de T associé à cette valeur propre λ.

Comme dans la question précédente, puisque $T(f)'' = -f$ et $T(f) = \lambda f$, alors f est solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y = 0$, et il existe donc deux réels A et B tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$. Mais $f = \dfrac{1}{\lambda}T(f)$, donc $f(0) = f'(1) = 0$, ce qui donne ici :

$$\begin{cases} A & = 0 \\ -A\sin(\omega) + B\cos(\omega) & = 0 \end{cases}$$

ou encore $A = B\cos(\omega) = 0$.

Si $\cos(\omega) \neq 0$ alors $B = 0$ puis $f = 0$, ce qui n'est bien sûr pas possible (f est vecteur propre). Arrivé ici, on sait qu'une éventuelle valeur propre est nécessairement de la forme $\dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\cos(\omega) = 0$, et les vecteurs propres associés sont de la forme $t \mapsto B\sin(\omega t)$.

— **Synthèse :** Supposons que $\cos(\omega) = 0$ et prenons $f : t \mapsto \sin(\omega t)$. On a alors pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^x t\sin(\omega t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 \sin(\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-t\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^x + \frac{1}{\omega}\int_0^x \cos(\omega t)\mathrm{d}t + x\left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_x^1 \\ &= \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega x) - x\frac{\cos(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega x) \text{ car } \cos(\omega) = 0 \\ &= \frac{1}{\omega^2}f(x) \end{aligned},$$

et f est bien vecteur propre de T associé à la valeur propre $\dfrac{1}{\omega^2}\cdot$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } T \text{ sont les réels de la forme } \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}\text{, où } k \text{ décrit } \mathbb{Z}.}$$

8.3 Pour chacune de ses valeurs propres $\lambda = \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}$, le sous-espace propre est la droite de E engendrée par la fonction $t \mapsto \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)t\right)$, de dimension 1.

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{Z} \text{ et } \omega = \frac{\pi}{2}+k\pi\text{, Ker }\left(T - \frac{1}{\omega^2}\mathrm{Id}\right) \text{ est dimension 1 et dirigé par } t \mapsto \sin(\omega t)}$$

3 Problème 3 : E3A 2024 (exercice 4)

1.

1.1

1.1.1 C'est du cours de première année :

$$\boxed{(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + \mathrm{o}_{h\to 0}(h^2).}$$

Le deuxième ordre est un piège pour la question suivante !

1.1.2 On pose $t = 1-h$ (puisque t tend vers 1 par valeurs inférieures, on préfère écrire $t = 1-h$ avec h positif...). Alors (inutile de répéter que h tend vers 0^+) :

$$\begin{aligned} 1 - t^\alpha &= 1 - (1-h)^\alpha = 1 - (1 - \alpha h + \mathrm{o}(h)) \\ &= \alpha h + \mathrm{o}(h) \sim \alpha h \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{1 - t^\alpha \sim \alpha(1-t) \text{ quand } t \to 1^-.}$$

1.2 L'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^\beta}$ est continue sur $[0,1[$, et $\varphi(1-u) = \dfrac{1}{u^\beta}$ qui est intégrable au voisinage (en u) de 0 (donc φ l'est au voisinage de 1) si et seulement si $\beta < 1$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \beta < 1.}$$

NDSG : La fonction en jeu est positive : la convergence de l'intégrale est donc équivalente à l'intégrabilité.

1.3 La fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est définie, positive et continue sur $[0,1[$ et $\psi(t) \sim \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}}$ au voisinage de 1.

Puisque $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t$ converge puis par comparaison :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

NDSG : ne rédigez pas comme ça ! Si vous prenez le point de vue (bof) des intégrales convergentes, alors les théorèmes de comparaison nécessitent à chaque fois de rappeler que la (les) fonction(s) en jeu est (sont) positive(s). Préférez comme moi le point de vue « intégrabilité » (dont on déduit à la fin la convergence de l'intégrale).

2. **Démonstration d'un encadrement**

2.1 Par étude de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t - 1 - t$ (calcul de la dérivée, du signe de cette dernière, tableau de variations, décroissance puis croissance), on montre que pour tout réel t : $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$.

On étudie ensuite la fonction $t \mapsto 1 + t + \dfrac{t^2}{2} - \mathrm{e}^t$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_-$ et dont la dérivée est $t \mapsto 1 + t - \mathrm{e}^t$. D'après la première inégalité, cette dérivée est négative, donc la fonction est décroissante, de $+\infty$ en $-\infty$ à 0 en 0. Elle est donc à valeurs positives sur $\mathbb{R}_-$.

NDSG : vous trouvez ça pénible à lire ? En effet. C'est pour ça que vous allez faire un tableau de variation avant de conclure par quelque chose comme « la décroissance de la fonction sur $]-\infty, 0]$ *nous assure qu'elle est minorée par* $f(0) = 0$ *sur* $]-\infty, 0]$. *»*

2.2

2.2.1 Là encore, on étudie sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ la fonction $g_p \ : \ u \leqslant 0 \mapsto \mathrm{e}^u - \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u^k}{k!}$.

C'est une fonction de classe C^∞, dont la dérivée vaut :

$$\forall u \leqslant 0, \quad g_p'(u) = \mathrm{e}^u - \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{ku^{k-1}}{k!} = \mathrm{e}^u - \sum_{k=0}^{2p} \frac{u^k}{(k)!}.$$

D'après l'hypothèse, $\mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}$ pour tout $u \leqslant 0$, ce qui prouve que g_p est une fonction décroissante. Valant 0 en 0, on en déduit que g_p est à valeurs positives, ce qui fournit l'inégalité attendue.

2.2.2 Ici, on étudie la fonction $g_p \; : \; u \leqslant 0 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+2} \frac{u^k}{k!} - \mathrm{e}^u$, qui est dérivable, de dérivée $u \leqslant 0 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u^k}{k!} - \mathrm{e}^u$, négative d'après la question précédente. Étant encore nulle en 0, décroissante, on en déduit qu'elle est à valeurs positives.

2.3 On démontre alors par récurrence sur l'entier p que :

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \; U_{2p+1} \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant U_{2p}.}$$

La question 2.1 est l'initialisation, la 2.2 l'hérédité.

3. C'est une conséquence de l'inégalité précédente, en prenant $u = \dfrac{1}{n}\ln(t)$, en retranchant 1 puis en multipliant tout par -1, ce qui a pour effet de renverser les inégalités.

$$\boxed{1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leqslant 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k.}$$

4. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est définie et continue sur $]0, 1[$.

   — Quand $t \to 0$, $\sqrt{t}|\ln(t)|^p \to 0$ par croissances comparées, donc $|\ln(t)|^p = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc φ est intégrable au voisinage de 0.

   — Au voisinage de 1 : $\varphi(1-u) \sim \dfrac{1}{u^{1-p+\frac{1}{n}}}$ quand u tend vers 0^+, or $p \geq 1$ donc $1 - p + \frac{1}{n} < 1$, donc $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-p+\frac{1}{n}}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc φ est intégrable au voisinage de 1.

$$\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur }]0,1[\text{ donc } \int_0^1 \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

NDSG : vous savez maintenant que sans la phrase introductive, tout part à la benne !

5. On applique l'inégalité obtenue à la question 3 avec $p = 1$. Il vient :

$$-\frac{1}{n}\ln(t) - \frac{1}{2n^2}(\ln(t))^2 \leqslant 1 - t^{\frac{1}{n}} \leqslant -\frac{1}{n}\ln(t).$$

On multiplie par $\dfrac{1}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$, puis on intègre entre 0 et 1, **toutes les intégrales étant convergentes**, pour obtenir :

$$\boxed{\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t.}$$

6. On utilise ici le théorème de convergence dominée, appliquée à la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 2}$, avec pour tout $n \geqslant 2$ et $t \in]0,1[$: $f_n(t) = \dfrac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$.

   — Pour tout $n \geq 2$, f_n est définie et continue sur $]0, 1[$.

— La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln^p(t)}{1-t}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

— La limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est continue sur $]0,1[$.

— Pour tout $n \geq 2$ et tout $t \in]0,1[$,

$$|f_n(t)| = \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{|\ln(t)|^p}{1-t} \times \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{\frac{3}{2}}},$$

car $\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \exp\left(\frac{1}{n}(-\ln(1-t))\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}(-\ln(1-t))\right)$ quand $n \geq 2$. La fonction dominante $t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est alors intégrable sur $]0,1[$ (question précédente, la convergence de l'intégrale étant ici équivalente à l'intégrabilité).

Ainsi d'après le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{1-t}\mathrm{d}t.}$$

7. On multiplie par n l'inégalité obtenue à la question 5, et on fait tendre n vers $+\infty$.
   Le membre de gauche, à savoir $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$, comme le membre de droite.
   Par encadrement (théorème des gendarmes, surtout pas de passage d'inégalités à la limite !), on en déduit :

$$\boxed{\lim_n (n\gamma_n) = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t.}$$

8. La fonction $t \mapsto -\ln(t)t^p$ est définie continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité en 0 si $p \geq 1$. Comme $t \mapsto -\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après le cours (par exemple parce que $\ln(t) = o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0), on en déduit :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } p\text{, l'intégrale } \int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

9. Tout d'abord :

$$\boxed{\int_0^1 -\ln(t)\mathrm{d}t = [t - t\ln(t)]_0^1 = 1.}$$

   NDSG : à ce niveau de l'épreuve, on peut ne pas passer par $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ldots$

   Si $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t = \left[-\ln(t)\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 + \frac{1}{p+1}\int_0^1 t^p\mathrm{d}t$, soit encore :

$$\boxed{\text{Si } p \in \mathbb{N}^* \text{ alors } \int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}.}$$

   NDSG : même remarque !

10. On applique le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions intégrables à la série de fonctions $\displaystyle\sum_p g_p$, où $g_p \;:\; t \mapsto -\ln(t)t^p$.

   — Chaque fonction g_p est intégrable sur $]0,1]$.

— La série de fonctions $\sum_{p\geq 0} g_p$ converge simplement sur $]0,1]$ et a pour somme la fonction $t \mapsto \frac{-\ln(t)}{1-t}$ qui continue sur $]0,1[$.

— La série $\sum_{p\geq 0}\int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ est la série $\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(p+1)^2}$, convergente.

On en déduit que l'on peut effectivement sommer terme à terme :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)^2}.}$$

11. On a montré que $n\gamma_n = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \mathrm{o}(1)$, ou encore :

$$\gamma_n = \frac{\pi^2}{6n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

FIN