CCP 2012 PC (maths 2)

Corrigé écrit par Denis Jourdan, et retouché à la marge par moi.

Partie I : le polylogarithme

I - 1.1. Soit $r > 0$.

- Si $r < 1$, alors par croissances comparées, $r^n = o(n^\alpha)$ donc $\left(\dfrac{r^n}{n^\alpha}\right)$ est bornée.
- Si $r > 1$, alors par croissances comparées, $n^\alpha = o(r^n)$ donc $\left(\dfrac{r^n}{n^\alpha}\right)$ tend vers $+\infty$ donc n'est pas bornée.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence } R \text{ de } \sum \frac{x^n}{n^\alpha} \text{ est } R = \mathrm{Sup}\left\{\ r \geqslant 0 \mid \left(\frac{r^n}{n^\alpha}\right) \text{ est bornée }\right\}, \text{ donc } R = 1.}$$

I - 1.2. L_α est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$. À ce titre, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$ (et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme).

I - 1.3. Soit $x \in]-1,1[$.

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^\alpha} x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^\alpha} x^{2k}$$

(en effet, tous les termes d'indice impair dans la somme sont nuls).

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2)}$$

I - 2.1. On a vu en **I - 1.2** que pour tout $x \in]-1,1[$, $L'_{\alpha+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^\alpha}$, donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad xL'_{\alpha+1}(x) = L_\alpha(x)}$$

$L_{\alpha+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $L_{\alpha+1}(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad L_{\alpha+1}(x) = \underbrace{L_{\alpha+1}(0)}_{=0} + \int_0^x L'_{\alpha+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{L_\alpha(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (elle tend vers 1 lorsque t tend vers 0) donc $\displaystyle\int_0^x \frac{L_\alpha(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^x L'_{\alpha+1}(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad L_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \frac{L_\alpha(t)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

I - 2.2. Soit $x \in]-1,1[$.

- $L_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$ (somme des termes d'une série géométrique).
- D'après la première relation de **I - 2.1**, $L_{-1}(x) = xL'_0(x) = x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
- D'après la deuxième relation de **I - 2.1**, $L_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{L_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x)$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad L_0(x) = \frac{x}{1-x},\ L_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } L_1(x) = -\ln(1-x)}$$

I - 3. On suppose $\alpha \leqslant 1$. Soit $x \in]0,1[$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et $x^n \geqslant 0$ donc $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{x^n}{n}\cdot$ Ainsi :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = L_1(x) = -\ln(1-x).$$

Or $\ln(1-x) \underset{x \to 1^-}{\to} -\infty$, donc :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \leqslant 1, \text{ alors } L_\alpha(x) \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty}$$

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

II - 1.1. Pour $x \in [-1,1]$, notons $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}\cdot$

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[-1,1]$.
- ▷ $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\alpha > 1$ donc $\sum \|u_n\|_\infty$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1, \text{ alors } L_\alpha \text{ est continue sur } [-1,1].}$$

II - 1.2. Avec **I - 2.1**, il vient, pour $x \in]0,1[$:

$$L_2'(x) = \frac{L_1(x)}{x} = \frac{-\ln(1-x)}{x} \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty$$

Appliquons le *théorème de la limite de la dérivée* :

- ▷ L_2 est continue sur $[0,1]$ (d'après **II - 1.1**) ;
- ▷ L_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ (d'après **I - 1.2**) ;
- ▷ $L_2'(x) = \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty$

Donc $\dfrac{L_2(x) - L_2(1)}{x-1} \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty$, et en particulier :

$$\boxed{L_2 \text{ n'est pas dérivable en } 1}$$

Ce théorème de la limite de la dérivée[1] *est souvent plus facile à prouver qu'à retenir : pour $x < 1$, le théorème des accroissements finis sur $[x,1]$ (continuité sur le fermé, dérivabilité sur l'ouvert) nous donne l'existence de $y(x) \in]x,1[$ tel que $\dfrac{L_2(x) - L_2(1)}{x-1} = L_2'(y(x))$. Puisque $x < y(x) < 1$, on a $y(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 1$, et il suffit alors de composer les limites.*

II - 2.1. On commence *bien entendu* par le commencement (sinon, poubelle...) :

- ▷ Pour tout $u > 0$, $\mathrm{e}^u - 1 > 0$ donc $\varphi : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - 1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- ▷ $|\varphi(u)| \underset{u \to 0}{\sim} u^{\alpha-2} = \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}\cdot$ Or $\alpha > 1$ donc $2 - \alpha < 1$ donc $u \mapsto \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$ est intégrable au voisinage de 0, donc φ aussi.
- ▷ En $+\infty$, $u^2\varphi(u) \sim u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-u}$ donc $\varphi(u) = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. Or $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ aussi.

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1, \text{ alors } \varphi : u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - 1} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

1. Et surtout pas du ≪ prolongement de la dérivée ≫...

II - 2.2. Soit $x \leqslant 1$. L'application $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car pour tout $u > 0$, $e^u > 1$ donc $e^u - x > 0$. De plus,

$$\forall u > 0, \qquad 0 \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} \leqslant \varphi(u)$$

donc par comparaison, $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du \text{ est définie si } x \in]-\infty, 1].}$$

II - 2.3. On vient de voir que $K_\alpha : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du$ est définie sur $]-\infty, 1]$.

Vérifions les hypothèses du *théorème de continuité des intégrales à paramètre :*

Pour $x \leqslant 1$ et $u > 0$, posons $g(x,u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$.

- ▷ Pour tout $x \leqslant 1$, $u \mapsto g(x,u)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$.
- ▷ Pour tout $u > 0$, $x \mapsto g(x,u)$ est continue sur $]-\infty, 1]$ (car si $u > 0$ et $x \leqslant 1$, $e^u > 1 \geqslant x$).
- ▷ Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in]-\infty, 1]$, $|g(x,u)| \leqslant \varphi(u)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **II - 2.1**

$$\boxed{K_\alpha : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du \text{ est (définie et) continue sur }]-\infty, 1].}$$

Notons qu'avec le théorème dont on dispose en PSI, la définition de l'intégrale est donnée dans la conclusion, et l'intégrabilité n'est donc pas à établir/signaler dans les hypothèses. En fait, la régularité (continuité par morceaux) et la domination fournissent cette intégrabilité.

II - 2.4. On suppose que $\alpha > 2$. Reprenons les notations précédentes et vérifions les hypothèses du *théorème de dérivation des intégrales à paramètre* :

- ▷ Pour tout $x \leqslant 1$, $u \mapsto g(x,u)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$.
- ▷ Pour tout $u > 0$, $x \mapsto g(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1]$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$.
- ▷ Pour tout $x \leqslant 1$, $u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
- ▷ Hypothèse de domination :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in]-\infty, 1], \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\right| = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2} =: \psi(u)$$

(en effet, si $x \leqslant 1$ et $u > 0$ alors $0 < e^u - x \leqslant e^u - 1$ donc $(e^u - x)^2 \leqslant (e^u - 1)^2 > 0$)
De plus, ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car
- ψ est continue sur $]0,+\infty[$;
- en 0^+, $\psi(u) \sim u^{\alpha-3}$ et $\alpha - 3 < 1$ donc ψ est intégrable au voisinage de 0 ;
- en $+\infty$, $\psi(u) = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ donc ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

L'hypothèse de domination est donc vérifiée et on peut conclure :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 2, \text{ alors } K_\alpha : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 1]}$$

II - 2.5. Supposons $\alpha \in]1, 2]$. Soient a, b deux réels tels que $a < b < 1$.

On procède comme dans la question précédente pour vérifier les premières hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Pour l'hypothèse de domination : pour tout $x \in [a,b]$, $e^u - x \geqslant e^u - b > e^u - 1 > 0$, donc $0 < (e^u - x)^2 \leqslant (e^u - b)^2$. Ainsi :

$$\forall x \in [a,b] \ \forall u > 0, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\right| = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - b)^2} =: \Psi(u)$$

Or Ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car

- Ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- au voisinage de 0^+, $\Psi(u) \sim \dfrac{u^{\alpha-1}}{(\mathrm{e}^u - b)^2}$ donc $\Psi(u) \to 0$ donc Ψ est intégrable au voisinage de 0 ;
- au voisinage de $+\infty$, $\Psi(u) = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ donc Ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi l'hypothèse de domination est vérifiée.
On a donc prouvé que K_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et ce pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-\infty, 1[$, donc :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1, \text{ alors } K_\alpha : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x}\,\mathrm{d}u \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 1[.}$$

II - 3.1. D'après **II - 2.2.** :

$$\boxed{G_\alpha = K_\alpha(0) \text{ existe.}}$$

D'autre part, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}$ est *continue, positive et non identiquement nulle*, donc :

$$\boxed{G_\alpha > 0}$$

II - 3.2. Soient $x \in [-1, 1]$ et $u > 0$. On a : $|x\mathrm{e}^{-u}| \leqslant \mathrm{e}^{-u} < 1$, donc :

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}} = \mathrm{e}^{-u}\sum_{n=0}^{+\infty}(x\mathrm{e}^{-u})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(n+1)u}.}$$

II - 3.3. Fixons $x_0 \in [-1, 1]$.

$$x_0 K_\alpha(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{x_0 u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x_0}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x_0^{k+1}\mathrm{e}^{-(k+1)u}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u,$$

après avoir posé $f_n(u) = u^{\alpha-1}x_0^n\mathrm{e}^{-nu}$.
Vérifions les hypothèses du *théorème d'intégration terme à terme :*

- ▷ Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue (par morceaux) intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (en effet, f_n se prolonge par continuité en 0 ($\alpha > 1$) et est négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$).
- ▷ $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme $u \mapsto \dfrac{x_0 u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x_0}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ▷ Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,\mathrm{d}u$ converge :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,\mathrm{d}u = |x_0|^n \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto nu$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc dans cette intégrale convergente le changement de variable $t = nu$ est licite et fournit :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,\mathrm{d}u = \frac{|x_0|^n}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{|x_0|^n}{n^\alpha}G_\alpha \leqslant \frac{G_\alpha}{n^\alpha}.$$

Or $\alpha > 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{G_\alpha}{n^\alpha}$ converge, et le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure.

On peut donc intégrer terme à terme :

$$x_0 K_\alpha(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_0^n}{n^\alpha}G_\alpha = G_\alpha L_\alpha(x_0)$$

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1]\ \forall \alpha > 1, \qquad xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x)}$$

II - 4.1. Par définition, pour tout $x \leqslant 1$, $L_\alpha(x) = \dfrac{x}{G_\alpha} K_\alpha(x)$, donc les questions **II - 2.3** et **II - 2.5** assurent que :

$$\boxed{L_\alpha \text{ est définie et continue sur }]-\infty, 1], \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\infty, 1[}$$

II - 4.2. Soit $x \leqslant 1$. L'application $t \mapsto -\ln(t)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc le changement de variable $u = -\ln(t)$ fournit d'una part la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1-xt}\,\mathrm{d}t$ et d'autre part l'égalité :

$$K_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{\frac{1}{t} - x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1-xt}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \leqslant 1,\ L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1-xt}\,\mathrm{d}t}$$

II - 4.3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. L'application $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (le dénominateur ne s'annule jamais), et son module tend vers 0 en 0 et est négligeable devant $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$, donc $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où l'existence l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}\,\mathrm{d}u$.

D'autre part, on a vu que si $z \in \mathbb{R}\backslash]1, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}\,\mathrm{d}u$ existe (cf **II - 2.2**).

En définitive :

$$\boxed{z \mapsto \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}\,\mathrm{d}u \text{ est bien définie sur } \mathbb{C}\backslash]1, +\infty[, \text{ et prolonge bien la fonction } L_\alpha.}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \notin]1, +\infty[$. Alors $z \notin]1, +\infty[$ et $-z \notin]1, +\infty[$ (en effet, si z ou $-z \in]1, +\infty[$ alors $z^2 \in]1, +\infty[$). On a alors :

$$L_\alpha(z) + L_{-\alpha}(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^u - z} - \frac{1}{\mathrm{e}^u + z} \right) \mathrm{d}u = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{2zu^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{2u} - z^2}\,\mathrm{d}u$$

L'application $u \mapsto 2u$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc le changement de variable $t = 2u$ est licite et fournit :

$$L_\alpha(z) + L_{-\alpha}(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{zt^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(\mathrm{e}^t - z^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{\alpha-1}} L_\alpha(z^2)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^2 \notin]1, +\infty[, \text{ on a } L_\alpha(z) + L_{-\alpha}(z) = \frac{1}{2^{\alpha-1}} L_\alpha(z^2)}$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$.

Les deux premières questions étaient « évidemment » hors programme ; désolé...

III - 1. Des techniques standard sur les séries de Fourier permettaient d'établir la valeur de $\zeta(2)$:

$$L_2(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} (= \zeta(2)) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensuite :

$$L_2(1) + L_2(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2} L_2(1)$$

(en effet, tous les termes d'indice impair dans la somme sont nuls).

$$\boxed{L_2(-1) = \frac{-1}{2} L_2(1) = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Remarques :
- ▷ on pouvait aussi utiliser le fait que L_2 est continue en 1 et en -1 (**II - 1.1**) et passer à la limite quand $x \to 1$ dans l'égalité de **I - 1.3.** pour obtenir $L_2(1) + L_2(-1) = \frac{1}{2}L_2(1)$.
- ▷ le signe de $L_2(-1)$ est bien en accord avec le théorème des séries alternées.

III - 2.1. L_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et lorsque x décrit $]0,1[$, $1-x$ reste dans $]0,1[$ donc $x \mapsto L_2(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition :

$$\boxed{\Phi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,1[.}$$

III - 2.2. On a vu en **I - 2.** que pour tout $x \in]0,1[$, $L_2'(x) = \dfrac{L_1(x)}{x} = \dfrac{-\ln(1-x)}{x}$ donc

$$\forall x \in]0,1[,\ \Phi'(x) = L_2'(x) - L_2'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$$

Ainsi Φ est constante sur l'intervalle $]0,1[$.
Or L_2 est continue en 1 et en 0 donc $L_2(x) \underset{x\to 1}{\to} L_2(1)$ et $L_2(1-x) \underset{x\to 1}{\to} L_2(0) = 0$.
De plus $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\to} 0$ (en effet, $\ln(1-h)\ln(h) \underset{k\to 0^+}{\sim} -h\ln(h)$ et $-h\ln(h) \underset{x\to 1^-}{\to} 0$)
Donc $\Phi(x) \underset{x\to 1^-}{\to} L_2(1)$. En définitive :

$$\boxed{\Phi \text{ est constante sur l'intervalle }]0,1[, \text{ égale à } L_2(1).}$$

III - 2.3. En prenant $x = \dfrac{1}{2}$, il vient $L_2(1) = \Phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2L_2\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln^2(2)$. On en tire :

$$\boxed{L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2(2)}{2}}$$

III - 2.4. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est strictement décroissante sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, à valeurs dans $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.
Donc $f : x \mapsto L_2(x) + L_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right) + \dfrac{1}{2}\ln^2(1-x)$ est définie sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$.
De plus elle est dérivable sur $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$ et en utilisant à nouveau le fait que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad L_2'(x) = \frac{L_1(x)}{x} = \frac{-\ln(1-x)}{x},$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[, \quad f'(x) &= L_2'(x) - \frac{1}{(x-1)^2} L_2'\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} \\
&= \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{1}{x(x-1)} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0
\end{aligned}$$

Donc f est constante sur $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right[$, égale à $f(0) = 0$.
De plus, vu que L_2 est continue sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, f est continue sur $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$ et donc pour tout $x \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, $f(x) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],\ L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(1-x)}$$

III - 3. D'après II-3., $K_2(1) = G_2 L_2(1)$ où $G_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$

Or une intégration par parties fournit : $\displaystyle\int_0^A t e^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}\,dt \underset{A\to+\infty}{\to} 1$, donc $G_2 = 1$ et finalement :

$$\boxed{K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u = L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}}$$

III - 4.1. Soit $x_0 < 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x_0}$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $[x_0, 0[$ sur $]0,1]$ donc le changement de variable $s = \dfrac{t}{x_0}$ est licite et fournit :

$$L_2(x_0) = \frac{-1}{G_2}\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1 - x_0 s} x_0 \mathrm{d}s = \frac{-1}{G_2}\int_0^{x_0} \frac{\ln(t/x_0)}{1-t}\mathrm{d}t$$

D'où, vu que $G_2 = 1$,

$$\boxed{\forall x < 0,\ L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln(t/x)}{1-t}\mathrm{d}t}$$

NB : ☹ il y avait une erreur de signe dans l'énoncé !

Fixons $\varepsilon \in]0, -x_0[$. Les fonctions $u : t \mapsto -\ln(1-t)$ et $v : t \mapsto \ln(t/x_0)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[x, -\varepsilon]$, donc en intégrant par parties :

$$\int_{x_0}^0 \frac{\ln(t/x_0)}{1-t}\mathrm{d}t = [-\ln(1-t)\ln(t/x_0)]_{x_0}^{-\varepsilon} + \int_x^{-\varepsilon} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or $-\ln(1-\varepsilon)\ln(\varepsilon/x_0) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \varepsilon \ln(\varepsilon)$ donc le crochet tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0^+$. D'où le résultat en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$:

$$\boxed{\forall x < 0, L_2(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

III - 4.2. Soit $x < 0$. Remarquons que $\dfrac{\ln(1-t)}{t-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln^2(1-t)\right)$, d'où :

$$\boxed{\forall x < 0,\ g(x) = \frac{1}{2}\left[\ln^2(1-t)\right]_x^0 = \frac{-1}{2}\ln^2(1-x)}$$

III - 4.3. $t \mapsto -t$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-\infty, 0[$ sur $]0, +\infty$, le changement de variable $u = -t$ indique que A existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u$ existe.

Posons $h : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u(u+1)}$.

▷ h est continue sur $]0, +\infty[$

▷ $h(t) \underset{u\to 0^+}{\to} 1$ donc h se prolonge par continuité en 0, donc h est intégrable sur $]0, 1]$

▷ $u^{3/2}h(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(u)}{\sqrt{u}}$ donc $h(u) = o_{u\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u^{3/2}}\right)$ donc h est intégrable au voisinage de $+\infty$

Finalement, h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, en particulier,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u \text{ existe donc } A \text{ aussi.}}$$

III - 4.4 D'après III-4.2. $g(x) = \dfrac{-1}{2}\ln^2(1-x) \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty$. D'autre part, $L_2(x) - g(x) = -\displaystyle\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to-\infty}{\to} -A$

Donc $L_2(x) = g(x) - A + o_{x\to-\infty}(1) \underset{x\to-\infty}{\sim} g(x)$

Mais $g(x) = \dfrac{-1}{2}\left(\ln(-x) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\right)^2 \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2}\ln^2(-x)$ donc finalement :

$$\boxed{L_2(x) = \frac{-x}{G_2}\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1 - xs}\mathrm{d}s \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{-1}{2}\ln^2(-x)}$$

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHEMATIQUES 2

Le sujet proposait l'étude de la fonction polylogarithme en tant que série entière, puis à un prolongement grâce à une intégrale. Cela était prétexte à utiliser bon nombre de notions et résultats du programme d'analyse. A plusieurs endroits, il convenait de citer les résultats du cours et vérifier avec précision les hypothèses. Cela révèle souvent les différentes qualités des candidats et on mesure alors leur compréhension ou au contraire leur incapacité à manipuler les dites notions. Il en va ainsi des propriétés des séries entières, de la notion de convergence normale, de l'intégrabilité, de l'étude des intégrales à paramètre, du théorème d'intégration terme à terme et des résultats sur les séries de Fourier. On voit aussi des étudiants qui connaissent le cours mais les méthodes ne sont pas assimilées. Signalons aux futurs candidats que la rigueur est la clé de la réussite et que d'écrire n'importe quoi ne rapporte pas de points.

Rappelons que l'on attend des candidats des réponses argumentées et le barème prévoit toujours des points pour ces vérifications et pénalise les imprécisions caractérisées. Les techniques d'intégration par parties ou de changement de variables sont bien utilisées mais encore faut-il un minimum de précision.

Le sujet comportait de nombreuses questions abordables et certains candidats ont pu aller très loin. Un certain nombre de questions pouvaient être considérées comme faciles ou des applications directes du cours. Dans le fil du problème, on note un nombre significatif d'erreurs (et de points perdus) chez des candidats qui omettent de mettre des valeurs absolues dans leurs raisonnements. On retrouve des notations mélangeant équivalents et développements limités notamment pour les existences d'intégrales.

Enfin, la quasi-totalité des copies sont bien présentées, rendant d'autant plus inacceptable certaines copies illisibles ou très mal présentées. La rédaction reste un axe de progrès pour les candidats, notamment pour bien citer les théorèmes utilisés. De manière générale, les correcteurs ont apprécié les copies bien présentées, où les résultats encadrés apparaissent clairement, la rédaction est précise et les justifications bien construites.

Passons maintenant aux remarques sur chacune des questions :

PARTIE I

I-1.1 : la règle de D'Alembert est globalement assimilée, mais il reste quand même des justifications incorrectes (en particulier sur le non usage de $|x|$).

I-1.2 : un résultat du cours sur les séries entières qu'il suffisait de rappeler et non pas de redémontrer. Quelquefois, on affirme aussi une convergence normale en général sur $]-R,R[$.

I-1.3 : cette question est presque toujours traitée correctement. Quelques erreurs néanmoins dans les plus mauvaises copies.

I-2.1 : si la relation sur la dérivée est le plus souvent établie correctement, il n'en va pas de même sur l'intégrale. Il était pourtant indispensable de préciser l'étude en 0, ce qui fut rarement fait.

I-2.2 : beaucoup trop d'erreurs dans cette question sur des calculs de sommes de séries entières de référence.

I-3 : certes, l'énoncé suggérait une minoration, mais on a trop souvent vu des inégalités fausses et on lit souvent de curieuses contributions.

PARTIE II

II-1.1 : la convergence en +1 et -1 est citée le plus souvent mais la continuité (convergence normale ou théorème radial) se limite à un lapidaire « converge donc est continue » non suffisant.

II-1.2 : le passage à la limite en 1 ne peut se faire aussi simplement que certains le pensent. Par ailleurs, le lien entre $L'2(x) \to +\infty$ et la non dérivabilité de L2 est affirmée sans être quasiment jamais démontrée.

II-2.1 : la justification de l'existence d'une intégrale impropre pose problème dans la rédaction, même si les arguments importants sont cernés. Peu de candidats commencent par indiquer que la fonction est continue sur le domaine ouvert d'intégration. L'étude en 0, en majorité bien traitée, amène parfois à des arguments ou majorations fausses. L'étude en $+\infty$ est généralement plus satisfaisante, même si certains candidats veulent utiliser le fait que la fonction tend vers 0 en $+\infty$.

II-2.2 : il est décevant de constater que trop peu de candidats font un lien avec la question précédente (avec une majoration) et beaucoup recommencent un raisonnement qui d'ailleurs ne s'adapte pas au voisinage de 0. La continuité de la fonction n'est quasiment jamais évoquée, son signe non plus, ce qui est gênant pour conclure.

II-2.3 : on peut, sur cette question et les suivantes, bien évaluer les candidats ayant travaillé régulièrement et connaissant les théorèmes du cours. Les hypothèses, notamment de domination, doivent être vérifiées. Il est aussi curieux de voir des candidats rechercher, sans succès, une autre fonction dominante que celle donnée dans l'énoncé et qui convient.

II-2.4 : beaucoup de rédactions approximatives sur cette question où les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre doivent être vérifiées.

II-2.5 : trop peu de candidats comprennent la différence entre cette question et la précédente, on affirme souvent qu'elle se traite de la même manière.

II-3.1 : là encore, l'argument de continuité de l'intégrande manque souvent, alors qu'ici, on en a également besoin pour $G\alpha > 0$. On pouvait également constater que $G\alpha = K\alpha(0)$, ce que certains observent.

II-3.2 : beaucoup de candidats oublient de préciser que la série géométrique ne converge que si la raison est de module strictement inférieur à 1. Le reste de la question est souvent correct.

II-3.3 : cette question a été diversement réussie. Seuls les meilleurs citent le théorème utile et vérifient une à une les hypothèses. Plus souvent, on cite le théorème mais on ne sait pas l'appliquer. Très peu ont réussi à traiter entièrement la question.

II-4.1 : cette question, facile étant donné les connaissances accumulées sur le sujet, n'a pas échappé à grand monde.

II-4.2 : le caractère au moins C1 bijectif du changement de variable doit être vérifié et ne l'est pas souvent.

II-4.3 : le début de cette question est peu souvent abordé. Si l'existence pose quelques problèmes aux candidats, le prolongement de la fonction sur le domaine complexe est rarement justifié. La seconde partie calculatoire a souvent été assez bien traitée ; la relation est souvent prouvée correctement par ceux qui abordent la question.

PARTIE III

III-1.1 : le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction paire, affine par morceaux devrait être un exercice simple. Force est de constater que les erreurs (de formules ou de calculs) amènent un résultat correct dans moins d'un cas sur deux. Beaucoup trop de résultats faux.

III-1.2 : les hypothèses de la formule de Parseval devraient être au moins citées, sinon démontrées clairement. Le théorème est en général mal connu (coefficients divers). Pire encore, on confond parfois convergence simple et quadratique, en oubliant l'intégrale. L2(1) est une valeur classique que certains candidats connaissent et citent ce qui permet à certains de rectifier une erreur de calcul à la question précédente. La valeur correcte de L2(-1) est beaucoup plus rare.

III-2.1 : une question facile faite très souvent, mais parfois quelques précisions manquent.

III-2.2 : cette question est souvent traitée correctement par ceux qui l'abordent. Les candidats dérivent avec succès sur]0,1[, mais d'autres trichent pour obtenir une dérivée nulle. Le passage à la valeur en 1 n'est que rarement argumenté.

III-2.3 : souvent traitée avec ou sans la bonne valeur donnée par la question précédente.

III-3 : question peu abordée et on conclut alors correctement en utilisant une fonction auxiliaire.

III-4 : cette dernière question (composée de trois sous-questions) est peu abordée. Pour ceux qui s'en saisissent, les résultats sont satisfaisants.

III-4.1 : il y avait une très regrettable erreur de signe devant l'une des intégrales proposées. Il a été tenu compte de cette erreur pour ne pas pénaliser les candidats donnant un résultat conforme à l'énoncé et bonifier ceux qui ont remarqué cette erreur. Pour l'intégration par parties, la limite est rarement vérifiée.

III-4.2 : calcul souvent fait, mais quelquefois au signe près.

III-4.3 : question correctement traitée dans les meilleures copies qui l'abordent.

Conclusion

La progressivité des questions a permis un bon étalement des notes. Nous ne pouvons que conseiller aux futurs candidats d'améliorer leurs préparations en mathématiques, se montrant capables de mettre en œuvre, sans erreurs, les notions et techniques de base. Une bonne connaissance du cours est indispensable et de nombreuses questions posées sont souvent très proches de son application directe ; l'énoncé propose souvent une démarche de résolution qu'il convient de comprendre et de suivre en montrant son savoir-faire, ce qui est l'objet de l'évaluation.