À rendre le mercredi 28 janvier 2026.

NDSG : La partie II.1 nécessite du soin... et en particulier vous êtes invités (par moi plus que par l'énoncé initial) à faire quelques dessins où on peut comprendre le statut des points fixes et le comportement de la suite. Des dessins pour $a \in \{1/2, 2, 1\}$ vous aideraient...

FILE D'ATTENTE

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.
On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.
On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j)t^j$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1 .
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.
Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $[T_1 = k], k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.
Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.
Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.
Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.
Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^a$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II. 1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f(z_n)$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.
Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$

Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant \psi(x) \Longleftrightarrow f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x$$

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II. 2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0 .
On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0 . Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.
On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe ètaient servis.
Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.
Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $[V_k = 0]$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.
Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} [V_n = 0]$?
Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$?
Q14. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(V_1 = k \mid S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
Q15. On note $z_n = \mathbb{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
Q16. Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.
Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.
Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in N}$. Interpréter.

FIN